DIE LÉVY-HINČIN-FORMEL FÜR FALTUNGSHALBGRUPPEN KOMPLEXER MASSE AUF HOMOGENEN RÄUMEN

DISSERTATION
der
MATHEMATISCHEN FAKULTÄT
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
HANSMARTIN ZEUNER
aus Crailsheim

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

DIE LÉVY-HINČIN-FORMEL FÜR FALTUNGSHALBGRUPPEN KOMPLEXER MASSE AUF HOMOGENEN RÄUMEN

DISSERTATION
der
MATHEMATISCHEN FAKULTÄT
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

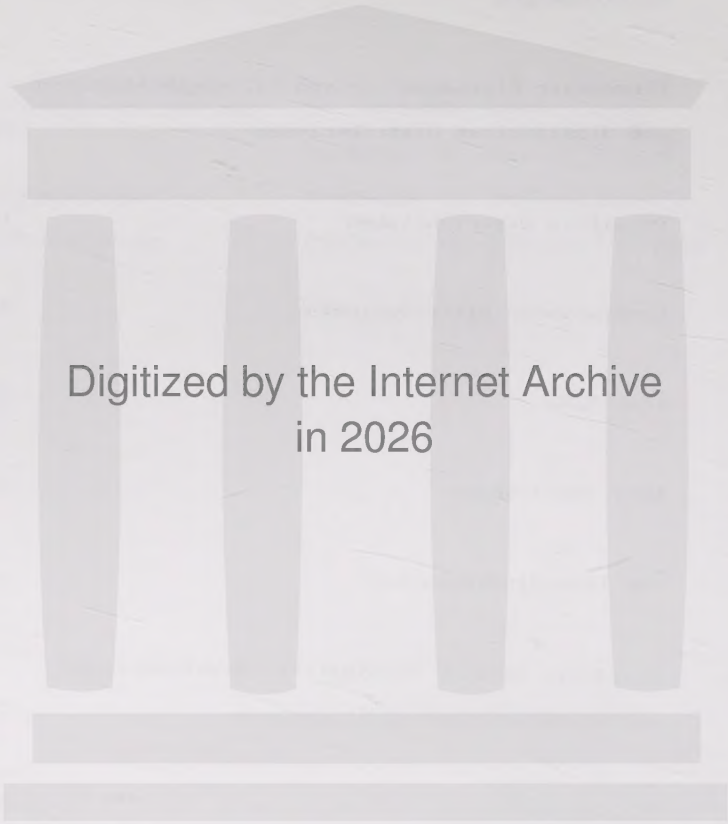
vorgelegt von
HANSMARTIN ZEUNER
aus Crailsheim

1983

Tag der mündlichen Prüfung:	14. Dezember 1983
Dekan:	Professor Dr. Ulrich Felgner
1. Berichterstatter:	Professor Dr. Herbert Heyer
2. Berichterstatter:	Professor Dr. Eberhard Siebert

Inhalt

	Einleitung	3
	Bezeichnungen	7
1.	Elementare Eigenschaften von Faltungshalbgruppen und dissipativen Distributionen	10
2.	Primitive Distributionen	16
3.	Quadratische Distributionen	24
4.	Lévy-Maße	33
5.	Lévy-Abbildungen	43
6.	Die Lévy-Hinčin-Formel	56
7.	Beispiele lokaler dissipativer Distributionen auf homogenen Mannigfaltigkeiten	77
	Bibliographie	94


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547612_0057

Einleitung

Wegen ihrer engen Beziehung zu unendlich teilbaren Maßen wurden Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_t $(t \geq 0)$ auf $\mathbb{R}$ schon früh untersucht (vgl. z.B. [20]). Auf P. Lévy und A.I. Hinčin geht die folgende Charakterisierung der Maße μ_t durch ihre Fouriertransformierte zurück, die als (klassische) Lévy-Hinčin-Formel bezeichnet wird:

$$\hat{\mu}_t(x) = \exp\{t \cdot [i\gamma x - \frac{\sigma^2 x^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2})\, d\eta(y)]\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist γ eine reelle Zahl, $\sigma \geq 0$ und η ein positives Maß auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{y^2}{1+y^2}\, d\eta(y) < \infty \quad .$$

Diese Formel läßt sich interpretieren als Zerlegung des infinitesimalen Erzeugers der Faltungshalbgruppe $(\mu_t : t \geq 0)$ in einen lokalen (d.h. auf den Ursprung konzentrierten) Teil, der durch γ und σ bestimmt ist, und einen nichtlokalen Anteil, den das Maß η charakterisiert.

In der Folge wurde die Lévy-Hinčin-Formel in vielfältiger Weise verallgemeinert. Eine detaillierte Schilderung dieser Entwicklungen findet sich in [13], S. 325 - 332. Hinsichtlich der verwendeten Methoden kann man drei Entwicklungsstränge beobachten:

Hunt [15] gab eine Verallgemeinerung für Faltungshalbgruppen auf Lie-Gruppen und homogenen Mannigfaltigkeiten an (vgl. auch Woll [25]), die von Hazod [10] und Siebert [24]

UNIV. LIBRARY PAU

auf beliebige lokalkompakte Gruppen verallgemeinert wurde, wobei allerdings nur Faltungshalbgruppen mit trivialem Idempotent $\mu_o = \varepsilon_1$ betrachtet werden.

Ein zweiter Entwicklungsstrang geht von dem Artikel [4] von Courrège für den $\mathbb{R}^p$ aus. In dessen Folge stehen Faraut [6], Roth [22] und Duflo [5]. In diesen Untersuchungen wird die Voraussetzung, daß die Faltungshalbgruppe $(\mu_t : t \geq 0)$ aus Wahrscheinlichkeitsmaßen besteht, abgeschwächt und stattdessen nur gefordert, daß alle μ_t komplexe kontraktive Maße sind.

Eine dritte Entwicklungslinie unterscheidet sich von den beiden vorigen grundsätzlich. Im Fall eines homogenen Raums G/K, wo (G,K) ein Gelfand-Paar ist, wurde der ursprüngliche Ansatz, Faltungshalbgruppen durch die Fouriertransformierte zu beschreiben, von Schoenberg (für eine kommutative Gruppe G) und Berg [2] verallgemeinert. Für konkrete Beispiele von Riemannschen symmetrischen Paaren ist dann wieder eine Lévy-Hinčin-Zerlegung möglich (vgl. [18], [2] und [7]).

In dieser Arbeit werden nun die bekannten Resultate in zweifacher Hinsicht verallgemeinert. Einerseits sollen die Einschränkung auf Wahrscheinlichkeitsmaße fallengelassen werden und stattdessen komplexe Maße der Norm ≤ 1 betrachtet werden, andererseits soll die Lévy-Hinčin-Formel für beliebige lokalkompakte Gruppen u n d für ein beliebiges Idempotent μ_o bewiesen werden.

Im ersten Paragraphen dieser Arbeit werden die grundlegenden Begriffe der Dissipativität und des verallgemeinerten

Laplace-Operators eingeführt und der bekannte Zusammenhang mit Faltungshalbgruppen dargestellt. Weiter werden verschiedene Definitionen der Normiertheit von dissipativen Distributionen miteinander verglichen und deren Beziehung zu verallgemeinerten Laplace-Operatoren untersucht.

Das einfachste nichttriviale Beispiel für dissipative Distributionen wird im zweiten Paragraphen betrachtet. Die Primitivität einer Distribution wird auf verschiedene Arten charakterisiert, und einige algebraische Eigenschaften der Menge der primitiven Distributionen werden bewiesen.

Als nächsteinfaches Beispiel werden in Paragraph drei die quadratischen Distributionen untersucht. Im klassischen Fall wird die Äquivalenz mit der üblichen Definition (vgl. [24] , S. 315) gezeigt.

Nach diesen Beispielen für lokale dissipative Distributionen bringt der vierte Paragraph eine Diskussion der Lévy-Maße, die im wesentlichen den nichtlokalen Teil einer dissipativen Distribution bestimmen. Der Begriff des Lévy-Maßes wird zunächst abstrakt eingeführt; es zeigt sich dann erst in Paragraph sechs, daß die gewählte Definition die richtige ist.

Im fünften Paragraphen wird das wichtigste technische Hilfsmittel , das zur Aufstellung der Lévy-Hinčin-Formel benötigt wird, die Lévy-Abbildung, definiert. Deren Existenz, die bisher eine Vermutung war (vgl. [11], vorletzter Abschnitt auf S. 136), wird nachgewiesen. Der Existenzbeweis orientiert sich an [24].

Nun sind die Hilfsmittel zusammengetragen, um im sechsten Paragraphen die Lévy-Hinčin-Formel zu formulieren und zu beweisen. Als Anwendung wird eine Verschärfung eines Satzes von Roth angegeben.

Der letzte Paragraph ist ausschließlich den Beispielen gewidmet. Für insgesamt sieben Riemannsche symmetrische Räume von Euklidischem, kompaktem und nichtkompaktem Typ werden sämtliche lokalen dissipativen Distributionen konkret angegeben.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele ermutigende Diskussionen möchte ich an dieser Stelle meinem Lehrer, Herrn Professor Doktor Herbert Heyer, herzlich danken.

Bezeichnungen

Wie üblich seien $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$ die Mengen der komplexen, reellen, ganzen bzw. nichtnegativen ganzen Zahlen. Im Sinne der mengentheoretischen Konstruktion der natürlichen Zahlen wird jedes $n \in \mathbb{N}$ als die Menge seiner Vorgänger aufgefaßt; also $0 = \emptyset$ und $n = \{0,1,\ldots,n-1\}$. Damit gilt für jedes $a = (a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j\in n} a_j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j .$$

Mit $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_+^*$ bezeichnet man die Mengen der nichtnegativen bzw. echt positiven reellen Zahlen. $\mathbb{T}$ sei die Menge aller komplexen Zahlen vom Betrag 1.

δ_{mn} sei das Kronecker-Symbol. Für jedes $l\in n$ sei $e_l \in \mathbb{R}^n$ der l-te Einheitsvektor $e_l := (\delta_{lm}:m\in n)$. $(\cdot|\cdot)$ bezeichne das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, $||x||_2 := (x|x)^{1/2}$ die Euklidische Norm eines Elements x von $\mathbb{R}^n$ und für $x\in\mathbb{R}^n$, $a\in\mathbb{R}_+^*$ sei $B_a(x)$ die Menge aller $y\in\mathbb{R}^n$ mit $||x-y||_2 < a$.

Für beliebige $x,y \in \mathbb{C}^n$ sei $x\otimes y$ die komplexe nxn-Matrix $(x_l y_m)_{l,m\in n}$. E_{lm} bezeichne die Matrix $e_l\otimes e_m$ und I_n die Einheitsmatrix $\sum_{l\in n} E_{ll}$.

Sind x_j $(j\in n)$ Elemente eines Vektorraums, so sei $\langle x_j : j\in n\rangle$ der von diesen Elementen aufgespannte Untervektorraum.

Sei nun X ein lokalkompakter topologischer Raum. Für eine Teilmenge A von X sei 1_A die Indikatorfunktion dieser Teilmenge. C(X) bezeichne die Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X. Für $f \in C(X)$ definiert man den Träger supp(f) durch $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x\in X : f(x)\neq 0\}}$. K(X) sei die Menge aller Ele-

mente von C(X), deren Träger kompakt ist. Für jede beschränkte Funktion f auf X sei $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

M(X) sei die Menge aller komplexen Radon-Maße auf X, $M^b(X)$, $M^+(X)$ bzw. $M^1(X)$ bezeichnen die Teilmengen der beschränkten Maße, der positiven Maße bzw. der Wahrscheinlichkeitsmaße.

Für jedes $x\in X$ sei ε_x das Dirac-Maß im Punkt x.

Für jedes $\mu \in M(X)$ sei $L^p(\mu)$ die Menge der Borel-meßbaren Funktionen f auf X mit $\int |f|^p d|\mu| < \infty$. Ist f eine lokal μ-integrierbare Funktion auf X, so bezeichnet $f\mu$ das Maß mit der μ-Dichte f.

Die vage Topologie ist die schwache Topologie $\sigma(M(X),K(X))$; die schwache Topologie auf $M^b(X)$ ist die schwache Topologie $\sigma(M^b(X),C^b(X))$ (vgl. [23], S. 52).

G sei jetzt und im folgenden stets eine lokalkompakte Gruppe mit Einselement 1 und einem linken Haar-Maß ω_G. Wenn G kompakt ist, sei ω_G normiert. G_1 sei die Zusammenhangskomponente der 1. Für eine Untergruppe H von G bezeichne N(H) den Normalisator von H in G.

Für jedes $g\in G$ seien σ_g bzw. τ_g die Abbildungen $x \to xg$ bzw. $x \to gx$ von G in sich. Ist f eine Funktion auf G und $g\in G$, so definiert man die Funktionen $\tilde{f}$, $\sigma_g(f)$ bzw. $\tau_g(f)$ auf G durch $\tilde{f}(x) := f(x^{-1})$ für alle $x\in G$, $\sigma_g(f) := f\circ\sigma_{g^{-1}}$ bzw. $\tau_g(f) := f\circ\tau_{g^{-1}}$.

Mit D(G) wird der topologische Vektorraum der komplexwertigen Testfunktionen (oder regulären Funktionen mit kompaktem Träger) bezeichnet; E(G) sei der Raum der komplexwertigen regulären Funktionen auf G. Beide Funktionenräume werden in [3]

mit Hilfe der Lösung von Hilberts fünftem Problem definiert.

Seien nun K eine kompakte Untergruppe von G und χ ein Charakter auf K, d.h. ein stetiger Homomorphismus von K in $\mathbb{T}$. Ist A(G) ein Raum von Funktionen auf G, so definiert man $A_{\mathbb{R}}(G)$ bzw. $A^b(G)$ bzw. $A^+(G)$ bzw. $A(G;\chi)$ als die Teilmenge der reellen bzw. beschränkten bzw. positiven Funktionen aus A(G) bzw. als die Teilmenge aller $f\in A(G)$ mit

$$\sigma_k(f) = \tau_k(f) = \chi(k)f \qquad \text{für alle } k\in K.$$

Im Falle des trivialen Charakters $\chi=1_K$ gelte die Abkürzung $A(G;K) := A(G;1_K)$.

Der Dualraum von D(G), der Raum D'(G) der Distributionen auf G, umfaßt in kanonischer Weise die Menge M(G). Ähnlich wie für Maße kann auch für jede Distribution $T\in D'(G)$ der Träger supp(T) definiert werden. Für zwei Distributionen T_0 und T_1, von denen mindestens eine einen kompakten Träger besitzt, ist das Faltungsprodukt $T_0 * T_1$ definiert (vgl. [14], S. 6).

Für $T\in D'(G)$ und $g\in G$ setzt man $\sigma_g(T) := T\circ\sigma_{g^{-1}}$ und $\tau_g(T) := T\circ\tau_{g^{-1}}$; beides sind Elemente von D'(G). Weiter seien $\check{T}$ bzw. $\overline{T}$ die Distributionen $f \to T(\tilde{f})$ bzw. $f \to \overline{T(\tilde{f})}$ sowie $T^* := \check{\overline{T}}$.

Für eine Teilmenge B(G) von D'(G) und einen Charakter χ auf einer kompakten Untergruppe K von G setzt man

$$B(G;\chi) := \{T\in B(G): T*\chi\omega_K = \chi\omega_K * T = T\}$$
$$= \{T\in B(G): \sigma_k(T) = \tau_k(T) = \overline{\chi(k)}T \text{ für alle } k\in K\}$$

mit der Abkürzung $B(G;K) := B(G;1_K)$.

Für alle Bezeichnungen, die differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen betreffen, sei auf [12] verwiesen.

1. Elementare Eigenschaften von Faltungshalbgruppen und dissipativen Distributionen

Dieser Paragraph bringt die für diese Arbeit zentralen Begriffe der dissipativen Distribution (1.4), des verallgemeinerten Laplace-Operators (1.4) sowie der (positiven) Normiertheit (1.7) mit einigen Eigenschaften, die im weiteren verwendet werden. Außerdem wird der bekannte Zusammenhang zwischen Faltungshalbgruppen und dissipativen Distributionen dargestellt (1.11), der die Wichtigkeit des Begriffs der Dissipativität aufzeigt.

(1.1) Definition: Eine Faltungshalbgruppe (auf G) ist ein schwach stetiger Homomorphismus $t \to \mu_t$ von $(\mathbb{R}_+,+)$ in die komplexe Faltungsalgebra $M^b(G)$ mit $\|\mu_t\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(1.2) Das Maß μ_o ist ein Idempotent von $M^b(G)$ und nach [11], Satz IX.5.2 auf Seite 126 von der Form $\mu_o = \chi\omega_K$ mit einer kompakten Untergruppe K von G und einem Charakter χ auf K.
Das Auftreten nichttrivialer Idempotente (d.h. $\mu_o \neq \varepsilon_1$) kann folgendermaßen interpretiert werden:

(1.3) Sei H eine kompakte Untergruppe des Kerns von χ (dies ist insbesondere der Fall, wenn $\chi = 1_K$ und $H = K$). Dann gilt $\mu_t \in M^b(G;H)$ für alle $t \geq 0$.
Bezeichnet π_H die kanonische Projektion von G auf G/H, so setzt sich π_H zu einer Bijektion zwischen $M^b(G;H)$ und der Menge
$M^b(H,G/H) := \{\mu \in M^b(G/H): \tau_h(\mu) = \mu \text{ für alle } h \in H\}$
der beschränkten H-invarianten Maße auf G/H fort. Mit Hilfe von

π_H kann man die Faltungsstruktur von $M^b(G;H)$ auf $M^b(H,G/H)$ übertragen (vgl. [14], S. 7-8). $(\pi_H(\mu_t):t\geq 0)$ ist somit eine Faltungshalbgruppe auf dem homogenen Raum G/H. In diesem Sinn verstehen sich die Sprechweisen "$(\mu_t:t\geq 0)$ ist eine Faltungshalbgruppe auf(G;H)" und "μ_o ist ein Idempotent auf (G;H)." Das Konzept der Faltungshalbgruppen auf einem homogenen Raum umfaßt insbesondere die bezüglich einer kompakten Gruppe von Automorphismen von G invarianten Faltungshalbgruppen (vgl. dazu [17], S. 47).

(1.4) Definition: Seien K eine kompakte Untergruppe von G und χ ein Charakter auf K.

Eine Distribution $T\in D'(G;\chi)$ heißt χ-dissipativ, falls für alle $f\in D(G;\chi)$ mit $f(1) = \|f\|_\infty$

$\operatorname{Re} T(f) \leq 0$ gilt.

Eine Distribution $T\in D'_{\mathbb{R}}(G;K)$ heißt verallgemeinerter K-Laplace-Operator, falls für alle $f\in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit

$f(1) \geq f$ und $f(1) \geq 0$

$T(f) \leq 0$ gilt.

(1.5) Bemerkung: Jeder verallgemeinerte K-Laplace-Operator ist 1_K-dissipativ.

(1.6) Nach [5], Lemme 1 läßt sich jede χ-dissipative Distribution T zerlegen als Summe eines endlichen Maßes μ und einer Distribution T_o von kompaktem Träger. Damit läßt sich T auf $E^b(G)$ fortsetzen durch $T(f) := T_o(f) + \int f\, d\mu$ für alle $f\in E^b(G)$.
Es gilt dann $\operatorname{Re} T(f)\leq 0$ für alle $f\in E^b(G)$ mit $f(1)=\|f\|_\infty$.

(1.7) Definition: Eine χ-dissipative Distribution T heißt normiert, falls für kein $\varepsilon>0$ $T + \varepsilon\cdot\chi\omega_K$ χ-dissipativ ist. Eine 1_K-dissipative Distribution T heißt positiv normiert, falls $T(1_G) = 0$ gilt.

(1.8) Bemerkung: Für jede χ-dissipative Distribution T existiert ein eindeutig bestimmtes $a\geq 0$ derart, daß $T + a\cdot\chi\omega_K$ χ-dissipativ und normiert ist.

(1.9) Bemerkung: Eine χ-dissipative Distribution T ist genau dann normiert, wenn

$\sup \{\mathrm{Re}\, T(f) : f\in D(G;\chi),\ f(1)-\|f\|_\infty \} = 0$.

Deshalb ist jede 1_K-dissipative und positiv normierte Distribution normiert. Für verallgemeinerte K-Laplace-Operatoren sind die Eigenschaften der Normiertheit und der positiven Normiertheit äquivalent.

Der nun folgende Satz zeigt, wie stark die Eigenschaft der positiven Normiertheit ist.

(1.10) Satz: Jede 1_K-dissipative und positiv normierte Distribution T ist ein verallgemeinerter K-Laplace-Operator.

Beweis: (1) Zuerst wird gezeigt, daß T reell ist, das heißt, daß für alle $f\in D_{\mathbb{R}}(G)$ $T(f)\in\mathbb{R}$ gilt.

Sei zunächst $f\in E^b_{\mathbb{R}}(G;K)$ und $f(1) = 0$. Wir setzen

$\phi := (\|f\|_\infty + 1)1_G - \sqrt{(\|f\|_\infty + 1)^2 1_G - f^2} \quad \in E^b_{\mathbb{R}}(G;K)$.

Es gilt $\phi(1) = 0 \leq \phi \leq (\|f\|_\infty + 1)1_G$

und für jedes $n\geq 1$

$$|n(\|f\|_\infty + 1)1_G - \frac{1}{n}\phi \pm if|^2$$
$$- (n(\|f\|_\infty + 1)1_G - \frac{1}{n}\phi)^2 + f^2$$
$$= n^2(\|f\|_\infty + 1)^2 1_G - 2(\|f\|_\infty + 1)\phi + \frac{1}{n^2}\phi^2 + f^2$$
$$\leq (n^2-1)(\|f\|_\infty + 1)^2 1_G + (\|f\|_\infty + 1)^2 1_G - 2(\|f\|_\infty + 1)\phi + \phi^2 + f^2$$
$$= n^2(\|f\|_\infty + 1)^2 1_G \quad .$$

Damit hat man für $f_n^{\pm} := n(\|f\|_\infty + 1)1_G - \frac{1}{n}\phi \pm if$
$f_n^{\pm} \in E^b(G;K)$ und $f_n^{\pm}(1) = \|f_n^{\pm}\|_\infty$,
woraus nach (1.6)
$0 \geq \text{Re } T(f_n^{\pm}) = -\frac{1}{n} \text{Re } T(\phi) \mp \text{Im } T(f)$
folgt, das heißt
$|\text{Im } T(f)| \leq \frac{1}{n} \text{Re } T(\phi)$ für alle $n \geq 1$.
Dies ist nur möglich, wenn
$\text{Im } T(f) = 0$ für alle $f \in E^b_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit $f(1) = 0$.

Sei nun $f \in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ beliebig. Für $f' := f - f(1)1_G \in E^b_{\mathbb{R}}(G;K)$
gilt dann $f'(1) = 0$, nach obigem also $T(f) = T(f') \in \mathbb{R}$.
Damit ist bewiesen, daß $T \in D'_{\mathbb{R}}(G;K)$.

(II) Sei nun $f \in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ und $f(1) \geq f$, $f(1) \geq 0$.
Für $f'' := f + \|f\|_\infty 1_G \in E^b_{\mathbb{R}}(G;K)$
gilt dann $f''(1) = \|f''\|_\infty$, woraus wegen (1.6)
$T(f) = T(f'') \leq 0$
folgt. Dies beweist, daß T ein verallgemeinerter K-Laplace-Operator ist. □

Der Zusammenhang zwischen Faltungshalbgruppen und dissipativen Distributionen ist der folgende.

(1.11) Satz und Definition:

a) Wenn $(\mu_t : t \geq 0)$ eine Faltungshalbgruppe mit Idempotent $\mu_o = \chi\omega_K$ ist, so ist

$T(f) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mu_t(f) - \mu_o(f))$ für alle $f \in D(G)$

definiert; T ist eine χ-dissipative Distribution.

b) Zu jeder χ-dissipativen Distribution $T \in D(G)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Faltungshalbgruppe $(\mu_t : t \geq 0)$ mit

$T(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mu_t(f) - \mu_o(f))$ für alle $f \in D(G)$.

In diesem Fall heißt T die erzeugende Distribution von $(\mu_t : t \geq 0)$ und $(\mu_t : t \geq 0)$ die von T erzeugte Faltungshalbgruppe.

c) Genau dann besteht die von T erzeugte Faltungshalbgruppe aus Wahrscheinlichkeitsmaßen, wenn $\chi = 1_K$ und T 1_K-dissipativ und positiv normiert ist.

Bezüglich des Beweises sei auf [5], Prop. 3 und 4 verwiesen. Entscheidend im Beweis ist ein auf J. P. Roth zurückgehender Satz ([22], II,2.4), der im folgenden wichtig wird.

(1.12) Bezeichnungen: Seien K eine Untergruppe von G und χ ein Charakter auf K. Dann bezeichne von nun an stets K' die kompakte Untergruppe $\{(k, \chi(k)) : k \in K\}$ von $G \times \mathbb{T}$.

Für jede Funktion $f \in C(G)$ sei Zf die Funktion

$(g,z) \to zf(g)$ auf $G \times \mathbb{T}$.

Es gilt $Zf \in K(G \times \mathbb{T})$, wenn $f \in K(G)$,

$Zf \in D(G \times \mathbb{T})$, wenn $f \in D(G)$, sowie

$Zf \in C(G \times \mathbb{T}; K')$, falls $f \in C(G; \chi)$.

Man kann daher für jedes $\mu \in M(G \times \mathbb{T})$ ein Maß $Z\mu \in M(G)$ definieren durch $Z\mu(f) := \mu(Zf)$ für alle $f \in K(G)$.

Ebenso sei für $T \in D'(G \times \mathbb{T})$ die Distribution $ZT \in D'(G)$ erklärt durch $ZT(f) := T(Zf)$ für alle $f \in D(G)$.
Aus $T \in D'(G \times \mathbb{T}; K')$ folgt $ZT \in D'(G; \chi)$.

(1.13) Satz (Roth): Sei T eine χ-dissipative Distribution auf G. Dann existiert eine positiv normierte $1_{K'}$-dissipative Distribution $T' \in D'(G \times \mathbb{T})$ mit

$T = ZT'$.

Der Beweis findet sich in [22], S. 22-30, ebenso eine Umformulierung in die Sprache der Faltungshalbgruppen (II.2.5).
Den Abschluß dieses Paragraphen bildet ein Hilfssatz, der im weiteren häufig verwendet wird.

(1.14) Hilfssatz: Sei K eine kompakte Untergruppe der lokalkompakten Gruppe G. Dann existiert eine offene Lie-projektive Untergruppe G_o von G, die K enthält.

Der Beweis, der auf der Lösung von Hilberts fünftem Problem beruht, ist in [11] auf S.137-138 ausgeführt.

2. Primitive Distributionen

Als erstes Beispiel für χ-dissipative Distributionen werden die χ-primitiven Distributionen in (2.1) definiert. Es werden mehrere Bedingungen angegeben, die zur χ-Primitivität äquivalent sind: (2.6) und (2.8) verwenden dazu die von T erzeugte Faltungshalbgruppe und (2.13) eine algebraische Eigenschaft von T. Eine weitere äquivalente Bedingung ist die Funktionalgleichung in (3.8), die den Bezug zur klassische Theorie herstellt. Am Schluß dieses Paragraphen werden dann noch einige algebraische Eigenschaften der Menge der primitiven Distributionen - die für beliebige Gruppen die Rolle der Lie-Algebra übernimmt - bewiesen.

(2.1) Definition: Eine Distribution $T \in D'(G;\chi)$ heißt χ-primitiv, falls T und -T χ-dissipativ sind. Die Menge der χ-primitiven Distributionen wird mit $P(G;\chi)$ bezeichnet; es gelte die Abkürzung $P(G;K) := P(G;1_K)$. Die Elemente der Menge $P_{\mathbb{R}}(G;K)$ der reellen 1_K-primitiven Distributionen heißen echt K-primitiv.

(2.2) Definition: Eine Distribution $T \in D'(G;\chi)$ heißt lokal, falls $\mathrm{supp}(T) \subset K$ gilt.

Es folgen nun einige Eigenschaften χ-primitiver Distributionen.

(2.3) $P(G;\chi)$ ist ein reeller Vektorraum.

(2.4) Jede χ-primitive Distribution ist lokal.

[Sei nämlich $f \in D(G;\chi)$ mit $\mathrm{supp}(f) \cap K = \emptyset$ gegeben. Dann gibt es ein $f_o \in D(G;\chi)$ mit $f_o(1) = \|f_o\|_\infty > \|f\|_\infty$ und $\mathrm{supp}(f_o) \subset \complement\mathrm{supp}(f)$. Da T χ-primitiv ist, gilt $\mathrm{Re}\, T(f_o) = 0$.

und für alle $z\varepsilon\mathbb{T}$ hat man $Re(zT(f)) = Re\,(T(f_o+zf)) = 0$.
Daraus folgt $T(f) = 0$.]

(2.5) Definition: Eine Faltungsgruppe auf G ist ein schwach stetiger Homomorphismus $t \to \mu_t$ von $(\mathbb{R},+)$ in $M^b(G)$ mit $\|\mu_t\| \leq 1$ für alle $t \varepsilon \mathbb{R}$.

(2.6) Eine χ-dissipative Distribution $T \varepsilon D'(G)$ ist genau dann χ-primitiv, wenn eine Faltungsgruppe $(\mu_t : t\varepsilon\mathbb{R})$ auf G mit Idempotent $\chi\omega_K$ existiert, sodaß $(\mu_t : t\geq 0)$ die von T erzeugte Faltungshalbgruppe ist.
[Wie in [5] konstruiert man eine Operatorhalbgruppe auf einem geeigneten Banach-Raum und wendet aus Kapitel IX von [26] die Theoreme in §7 und §9 an.]

Um eine vollständige Darstellung der χ-primitiven Distributionen zu erhalten, ist es sinnvoll, sich mit Hilfe von (1.13) auf den Fall von positiv normierten Distributionen zurückzuziehen. Es gelten wieder die Bezeichnungen von (1.12).

(2.7) Hilfssatz: Sei $(\mu_t : t\varepsilon\mathbb{R})$ eine Faltungsgruppe auf G mit Idempotent $\chi\omega_K$. Dann gibt es genau eine Faltungsgruppe $(\nu_t : t\varepsilon\mathbb{R})$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $G\times\mathbb{T}$ mit
$Z\nu_t = \mu_t$ für alle $t\varepsilon\mathbb{R}$.
Es gilt $\nu_o = \omega_{K'}$.

Beweis: Wegen $\mu_t * \mu_{-t} = \mu_o = \chi\omega_K$ gilt $\|\mu_t\| = 1$ für alle $t\varepsilon\mathbb{R}$. Nach [22], Proposition II.1.1. gibt es eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaße ν_t $(t\varepsilon\mathbb{R})$ auf $G\times\mathbb{T}$ mit
$Z\nu_t = \mu_t$ für alle $t\varepsilon\mathbb{R}$.

Die nach [22], Corollaire II.2.5. konstruierten Faltungshalbgruppen $(\nu'_t : t\geq 0)$ und $(\nu''_t : t\geq 0)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $G\times\mathbb{T}$ mit

$$Z\nu'_t = \mu_t \quad \text{und} \quad Z\nu''_t = \mu_{-t} \qquad \text{für alle } t\geq 0$$

stimmen wegen der Eindeutigkeitsaussage aus [22], II.1.1. und $\|\mu_t\| = 1$ für alle $t\in\mathbb{R}$ mit $(\nu_t : t\geq 0)$ und $(\nu_{-t} : t\geq 0)$ überein. Aus [22], II.2.2. Lemme 1 folgt $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$. Deshalb ist $(\nu_t : t\geq 0)$ eine Faltungsgruppe mit Idempotent $\omega_{K'}$. □

(2.8) Satz: Jede Faltungsgruppe $(\mu_t : t\in\mathbb{R})$ mit $\mu_o = \chi\omega_K$ ist von der Gestalt

$$\mu_t = e^{iut}\cdot\tau_{g_t}(\chi\omega_K) \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Dabei ist $u\in\mathbb{R}$ und $(g_t : t\in\mathbb{R})$ eine Einparameteruntergruppe von G mit

$$g_t k g_{-t} k^{-1} \in \operatorname{Ker}\chi \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R} \text{ und } k\in K.$$

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

Ⓘ Seien zunächst $\chi = 1_K$ und $\mu_t \in M^1(G)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

Wir setzen $M_t := \operatorname{supp}(\mu_t)$ und wählen $a_t \in M_t$.

Dann gilt wegen [13], Theorem 1.2.1 (ii)

$$\overline{M_s M_t} \subset M_{s+t} \qquad \text{für alle } s,t\in\mathbb{R},$$

$$a_t K \subset \overline{M_t M_o} = M_t \quad \text{und} \quad a_{-t} M_t \subset \overline{M_{-t} M_t} = M_o = K \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R},$$

folglich $a_t K \subset M_t \subset a_{-t}^{-1} K$ und schließlich

$$a_t K = M_t = a_{-t}^{-1} K \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Ebenso sieht man

$$K a_t = M_t = K a_{-t}^{-1} \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Aus $a_t K = K a_t$ folgt, daß a_t im Normalisator $N(K)$ von K ist, also $\operatorname{supp}(\mu_t) \subset N(K)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

Wir können uns also auf $G=N(K)$ beschränken, das heißt K als Normalteiler von G annehmen.

Für die Faltungsgruppe $(\pi_K(\mu_t):t\in\mathbb{R})$ auf der Faktorgruppe G/K gilt $\operatorname{supp}\pi_K(\mu_t) = \pi_K(M_t) = \{\pi_K(a_t)\}$, das heißt $\pi_K(\mu_t) = \varepsilon_{x_t}$ für alle $t\in\mathbb{R}$ (mit $x_t := \pi_K(a_t)$).

Da $(\pi_K(\mu_t):t\in\mathbb{R})$ eine Faltungsgruppe ist, gilt

$x_s x_t = x_{s+t}$ für alle $s,t\in\mathbb{R}$.

und x_o ist das Einselement von G/K.

Aus der schwachen Stetigkeit von $t \to \pi_K(\mu_t) = \varepsilon_{x_t}$ folgt $\lim_{t\to o} x_t = x_o = 1$, das heißt $(x_t:t\in\mathbb{R})$ ist eine Einparameteruntergruppe von G/K.

Nach [21], 4.15., Theorem 1 existiert eine Einparameteruntergruppe $(g_t:t\in\mathbb{R})$ von G mit $\pi_K(g_t) = x_t$ für alle $t\in\mathbb{R}$; daraus folgt $g_t K = a_t K$ und somit $\mu_t = \tau_{g_t}(\omega_K)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

(II) Seien nun μ_t und χ beliebig. Nach (2.7) existiert eine Faltungsgruppe $(\nu_t:t\in\mathbb{R})$ auf $G\times\mathbb{T}$ mit

$Z\nu_t = \mu_t$ für alle $t\in\mathbb{R}$ und $\nu_o = \omega_{K'}$.

Nach (I) existieren Einparameteruntergruppen $(g_t:t\in\mathbb{R})$ bzw. $(z_t:t\in\mathbb{R})$ auf G bzw. $\mathbb{T}$ mit

$\nu_t = \tau_{(g_t,z_t)}(\omega_{K'})$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

Also existiert $u\in\mathbb{R}$ mit $z_t = e^{iut}$ für alle $t\in\mathbb{R}$,

und aus $(g_t,z_t)\in N(K')$ folgt

$\chi(g_t k g_{-t}) = \chi(k)$ und weiter

$g_t k g_{-t} k^{-1} \in \operatorname{Ker}\chi$ für alle $t\in\mathbb{R}$ und $k\in K$. Schließlich hat man

$\mu_t = Z(\tau_{(g_t,e^{iut})}(\omega_{K'})) = e^{iut}\tau_{g_t}(\chi\omega_K)$ für alle $t\in\mathbb{R}$. □

(2.9) Bemerkung: Ist umgekehrt $(g_t:t\in\mathbb{R})$ eine Einparameteruntergruppe von G mit $g_t k g_{-t} k^{-1} \in \operatorname{Ker}\chi$ für alle $t\in\mathbb{R}$ und $k\in K$

und ist $u \in \mathbb{R}$, so rechnet man leicht nach, daß
$(e^{iut} \tau_{g_t} (\chi\omega_K) : t \in \mathbb{R})$ eine Faltungsgruppe auf G ist.

(2.10) Korollar: Eine Distribution T auf G ist genau dann χ-primitiv, wenn

$T = iu \cdot \chi\omega_K + X * \chi\omega_K$,

wobei $u \in \mathbb{R}$, $X(f) = \frac{d}{dt} f(g_t)|_{t=o}$ für alle $f \in D(G)$

und $(g_t : t \in \mathbb{R})$ eine Einparameteruntergruppe von G mit

$g_t k g_{-t} k^{-1} \in \operatorname{Ker} \chi$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in K$ ist.

(2.11) Bemerkung: Insbesondere gilt $g_t \in N(K)$ und $g_t \in N(\operatorname{Ker} \chi)$
für alle $t \in \mathbb{R}$.
Wenn daher die Zusammenhangskomponente der 1 in N(K) ganz in K liegt, gilt

$P(G;\chi) = \{iu \cdot \chi\omega_K : u \in \mathbb{R}\}$.

(2.12) Diskussion: $P_{\mathbb{R}}(G;\{1\})$ stimmt mit der Lie-Algebra von G im Sinn von [19] überein. ⟦ Für Lie-Gruppen folgt die behauptete Isomorphie aus [24], Lemma 2. Daraus folgt die Behauptung im allgemeinen Fall, da sowohl die Lie-Algebra im Sinn von [19], als auch die Menge der Distributionen sich mittels eines projektiven Limes aus dem Lie-Gruppen-Fall ableiten. ⟧

(2.13) Satz: Für eine χ-dissipative Distribution T sind äquivalent:

(i) $T \in P(G;\chi)$,

(ii) $T^* = -T$.

Beweis: (i)⇒(ii) Nach (2.10) ist $T = iu \cdot \chi\omega_K + X * \chi\omega_K$
mit $u \in \mathbb{R}$ und $Xf = \frac{d}{dt} f(g_t)|_{t=o}$, wobei $(g_t : t \in \mathbb{R})$ eine Einparameteruntergruppe von G ist.
Für alle $f \in D(G;\chi)$ folgt

$$
\begin{aligned}
T^*(f) &= \overline{T(\bar{f})} \\
&= \overline{iu\,\overline{f(1)} + \frac{d}{dt}\,\bar{f}(g_t^{-1})|_{t-o}} \\
&= -iu\,f(1) + \frac{d}{dt}\,f(g_{-t})|_{t=0} \\
&= -T(f) \quad ,
\end{aligned}
$$

d.h. $T^* = -T$.

((ii)⇒(i)) Wenn $T^* = -T$, so ist sowohl T als auch $-T = T^*$ χ-dissipativ, d.h. $T \in P(G;\chi)$. □

(2.14) Satz: Die Abbildung $Z : P_{\mathbb{R}}(G\times\mathbb{T};K') \to P(G;\chi)$ ist ein Isomorphismus.

Es folgen nun noch einige algebraische Eigenschaften der Menge der χ-primitiven Distributionen, die bei der Konstruktion von Lévy-Abbildungen im Paragraph sechs wichtig werden.

(2.15) Notation: $P_{\mathbb{C}}(G;\chi) := P(G;\chi) + iP(G;\chi)$.

Die Darstellung der Elemente von $P_{\mathbb{C}}(G;\chi)$ ist eindeutig, wie aus dem folgenden Hilfssatz ersichtlich ist.

(2.16) Hilfssatz: a) $P(G;\chi) \cap iP(G;\chi) = \{0\}$.

b) Sei N ein kompakter Normalteiler von G. Falls $K \cap N$ nicht in Ker χ enthalten ist, gilt $\pi_N(D'(G;\chi)) = \{0\}$.

c) Sei wieder N ein kompakter Normalteiler von G, und gelte $K \cap N \subset \mathrm{Ker}\,\chi$. Dann ist

π_N: $KN/N \to \mathbb{T}$, $kN \to \chi(k)$

ein (wohldefinierter) Charakter auf KN/N; es gilt

$\pi_N(P(G;\chi)) = P(G/N;\chi_N)$ sowie

$\{T\in P(G;\chi):\pi_N(T) = iu\cdot\chi_N\omega_{KN/N}$ für ein $u\in\mathbb{R}\} = P(KN;\chi)$,

$\{T\in P_{\mathbb{C}}(G;\chi):\pi_N(T) = c\cdot\chi_N\omega_{KN/N}$ für ein $c\in\mathbb{C}\} = P_{\mathbb{C}}(KN;\chi)$.

d) Ist L ein abgeschlossener Normalteiler von G und zugleich Lie-Gruppe, dann ist

$\dim_{\mathbb{R}}(P(KL;\chi)) < \infty$.

Beweis: a) Sei $T\in P(G;\chi)\cap iP(G;\chi)$. Dann gilt nach (2.13) $T^* = -T$ und $(iT)^* = -iT$. Daraus folgt aber $-iT = (iT)^* = -iT^* = +iT$, das heißt $T = 0$.

b) Seien $k\in K\cap N$ mit $\chi(k)\neq 1$ und $T\in D'(G;\chi)$. Dann folgt aus $\overline{\chi(k)}\cdot\pi_N(T) = \pi_N(\tau_k(T)) = \tau_{kN}(\pi_N(T)) = \pi_N(T)$ sofort $\pi_N(T) = 0$.

c) Ist dagegen $K\cap N\subset \operatorname{Ker}\chi$, so impliziert $kN = k'N$ $k^{-1}k'\in K\cap N\subset \operatorname{Ker}\chi$, das heißt $\chi(k) = \chi(k')$.

χ_N ist also wohldefiniert.

Zum Beweis von $\pi_N(P(G;\chi)) = P(G/N;\chi_N)$ sei $T\in P(G/N;\chi_N)$; die von T erzeugte Faltungsgruppe sei $(e^{iut}\tau_{x_t}(\chi_N\omega_{KN/N}):t\in\mathbb{R})$ mit $u\in\mathbb{R}$ und einer Einparameteruntergruppe $(x_t:t\in\mathbb{R})$ von G/N. Nach [21], 4.15., Theorem 1 existiert eine Einparameteruntergruppe $(g_t:t\in\mathbb{R})$ von G mit

$g_tN = x_t$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

$T''\in P(G;\{1\})$ sei definiert durch

$T''(f) := iu\,f(1) + \frac{d}{dt}f(g_t)|_{t=0}$ und

$T' := \chi\omega_K * T * \chi\omega_K \in P(G;\chi)$.

Damit gilt für alle $f\in D(G/N;\chi_N)$

$$\begin{aligned}\pi_N(T')(f) &= T'(f\circ\pi_N)\\ &= T''(f\circ\pi_N)\\ &= iu\cdot f(1N) + \frac{d}{dt}f(g_tN)|_{t=0}\\ &= iu\cdot f(1N) + \frac{d}{dt}f(x_t)|_{t=0} = T(f),\end{aligned}$$

das heißt $\pi_N(T') = T$.

Da die letzte der Identitäten in c) aus der vorletzten folgt, ist noch zu zeigen, daß

$\{T \in P(G;\chi) : \pi_N(T) = iu \cdot \chi_N \omega_{KN/N}$ für ein $u \in \mathbb{R}\} = P(KN;\chi)$.

Sei also $T \in P(G;\chi)$ und $(e^{iat}\tau_{g_t}(\chi\omega_K) : t \in \mathbb{R})$ die von T erzeugte Faltungsgruppe. Dann gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\bigvee_{u \in \mathbb{R}} \quad \pi_N(T) = iu \cdot \chi\omega_{KN/N}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \bigvee_{u \in \mathbb{R}} \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \quad e^{iat}\tau_{g_t N}(\chi_N \omega_{KN/N}) = \pi_N(e^{iat}\tau_{g_t}(\chi\omega_K)) = e^{iut}\chi_N \omega_{KN/N}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \quad g_t N \in KN/N$$

$$\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \quad g_t \in KN$$

$$\Longleftrightarrow \quad T \in P(KN;\chi).$$

d) $P(KL;\chi) \tilde{=} P_{\mathbb{R}}(KL \times \mathbb{T}; K')$ wegen (2.14)

$= P_{\mathbb{R}}(K'(L \times \mathbb{T}) \cap N(K'); K')$ wegen (2.11)

$\cdot P_{\mathbb{R}}(K'((L \times \mathbb{T}) \cap N(K')); K')$

$\tilde{=} P_{\mathbb{R}}(K'((L \times \mathbb{T}) \cap N(K'))/K'; \{1\})$ wegen c).

Da abgeschlossene Untergruppen und Faktoren von Lie-Gruppen wieder Lie-Gruppen sind, ist

$(K'((L \times \mathbb{T}) \cap N(K')))/K' \cong ((L \times \mathbb{T}) \cap N(K'))/(K' \cap (L \times \mathbb{T}) \cap N(K'))$

eine Lie-Gruppe.

Deren (endlich-dimensionale) Lie-Algebra stimmt aber gerade mit der Menge der echt {1}-primitiven Distributionen überein. □

3. Quadratische Distributionen

Ein etwas komplizierteres Beispiel für χ-dissipative Distributionen als die χ-primitiven bilden die χ-quadratischen, die in (3.1) definiert werden. Das zu ihrer Untersuchung notwendige analytische Rüstzeug wird in (3.7) bereitgestellt. In (3.8) wird die Äquivalenz unserer Definition mit der von [24] gezeigt. Im Falle einer Lie-Gruppe werden die χ-quadratischen Distributionen in (6.15) und (6.16) charakterisiert. In (3.3) und (3.4) wird bewiesen, daß die Existenz nicht trivialer χ-quadratischer Distributionen auf G äquivalent dazu ist, daß G/K nicht total unzusammenhängend ist. Beispiele für χ-quadratische Distributionen werden im siebten Paragraphen explizit angegeben.

(3.1) Definition: Eine χ-dissipative Distribution T auf G heißt χ-quadratisch, falls T normiert und lokal ist und $T^* = T$ gilt.
T heißt echt K-quadratisch, wenn T 1_K-quadratisch und positiv normiert ist.

Es stellt sich die Frage, in welchen Fällen überhaupt χ-quadratische Distributionen $\neq 0$ existieren. Nun gilt:

(3.2) Bemerkung: Für jede Faltungshalbgruppe $(\mu_t : t \geq 0)$, deren erzeugende Distribution T lokal ist, gilt
$\operatorname{supp}(\mu_t) \subset K \cdot G_1$ für alle $t \geq 0$.

Beweis: Man sieht leicht, daß $K \cdot G_1 = \bigcap \{H \leq G : H \text{ offen}, K \subset H\}$. Es genügt also zu zeigen, daß
$\operatorname{supp}(\mu_t) \subset H$ für alle $t \geq 0$ und alle offene Untergruppen H von G, die K enthalten.

Um dies zu beweisen betrachten wir $f \in D(G;\chi)$ mit $f(1) = \sup_{h \in H} |f(h)|$.
Da T lokal ist, folgt daraus aber $\operatorname{Re} T(f) \leq 0$.
und mit [5]; Prop. 6 schließt man $\operatorname{supp}(\mu_t) \subset H$ für alle $t \geq 0$. □

(3.3) Aus dieser Bemerkung folgt, daß in dem Falle, daß G/K total unzusammenhängend ist, 0 die einzige χ-quadratische Distribution auf G ist. $[\![\pi_K(G_1)$ ist die Zusammenhangskomponente von 1K in G/K, also nach Voraussetzung gerade {1K}. Daraus folgt $K \cdot G_1 = K$.
Sei T eine χ-quadratische Distribution und $(\mu_t : t \geq 0)$ die von ihr erzeugte Faltungshalbgruppe. Nach (3.2) gilt

$\operatorname{supp}(\mu_t) \subset K \cdot G_1 = K$ für alle $t \geq 0$, das heißt

$\mu_t = e^{at} \chi \omega_K$ für alle $t \geq 0$, für ein geeignetes $a \in \mathbb{C}$.

Wegen $T^* = T$ und der Normiertheit von T ist nur $T = 0$ möglich.]]

Für den anderen Fall, daß G/K nicht total unzusammenhängend ist, liefert der folgende Satz eine positive Antwort auf die Frage nach der Existenz von nichttrivialen χ-quadratischen Distributionen.

(3.4) Satz: Wenn G/K nicht total unzusammenhängend ist, dann existiert eine von 0 verschiedene χ-quadratische Distribution. Falls $\chi = 1_K$, so kann sie als echt K-quadratisch gewählt werden.

Beweis: (I) Zuerst beweisen wir die Existenz von $X \in P_{\mathbb{R}}(G;\{1\})$ und $f \in D_{\mathbb{R}}(G)$ mit $f(k) = 0$ für alle $k \in K$, derart daß $X(f) \neq 0$ gilt:
A sei die Zusammenhangskomponente von 1K in G/K, also gilt nach Voraussetzung $A \neq \{1K\}$ und $H := \pi_K^{-1}(A) \supsetneq K$. Man sieht leicht, daß H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist.
Die Behauptung I wird nun in den folgenden drei Abschnitten

zuerst für den Fall, daß G eine Lie-Gruppe ist, dann für Lie-projektives G und schließlich für eine beliebige lokalkompakte Gruppe G bewiesen.

Sei G eine Lie-Gruppe. Da $\pi_K(H)$ zusammenhängend und daher nicht diskret ist, ist die Lie-Algebra von K echt in der von H enthalten. Es existiert ein $X \in P_{\mathbb{R}}(G;\{1\})$, das nicht zu $P_{\mathbb{R}}(K;\{1\})$ gehört. Es gibt daher eine Linearform ϕ auf der Lie-Algebra von G, die X auf 1 und $P_{\mathbb{R}}(K;\{1\})$ auf 0 abbildet. Man erhält ein geeignetes f, indem man ϕ außerhalb einer Nullumgebung abschneidet und mittels der Exponentialabbildung auf G hinüberprojiziert.

Als nächstes betrachten wir den Fall einer Lie-projektiven Gruppe G. Wegen $H \supsetneq K$ existiert ein kompakter Normalteiler L von G, derart daß G/L eine Lie-Gruppe ist und $\pi_L(H) \supsetneq \pi_L(K)$ gilt. Deswegen besteht die Zusammenhangskomponente von $\pi_L(K)$ in $(G/L)/\pi_L(K)$ nicht nur aus einem Element und der vorangehende Abschnitt liefert eine Distribution $X_o \in P_{\mathbb{R}}(G/L;\{1\})$ und eine Funktion $f_o \in D_{\mathbb{R}}(G/L)$, die auf $\pi_L(K)$ verschwindet, mit $X_o(f_o) \neq 0$. Nach (2.16) c) existiert aber eine Distribution $X \in P_{\mathbb{R}}(G;\{1\})$ mit $\pi_L(X) = X_o$. Deshalb kann man $f := f_o \circ \pi_L$ wählen.

Falls G schließlich eine beliebige lokalkompakte Gruppe ist, gibt es nach (1.14) eine offene Lie-projektive Untergruppe G_o von G, in der K enthalten ist. Eine Anwendung des vorigen Abschnitts auf G_o liefert eine echt $\{1\}$-primitive Distribution X auf G_o und eine Funktion $f \in D(G_o)$ mit $f(k)=0$ für alle $k \in K$ und $X(f) \neq 0$, die sich beide auf G fortsetzen lassen.

(II) Die Aussage des Satzes wird nun zuerst im Fall $\chi = 1_K$ bewiesen. Seien X und f nach I gewählt. Für die Funktion $f_o := f^2 \in D_{\mathbb{R}}(G)$

gilt deshalb $X*X(f_o) > 0$, $f_o \geq 0$ und $f_o(k)=0$ für alle $k \in K$.
Die gleichen Eigenschaften gelten auch für $f_o * \omega_K$, denn
$(X*X)(f_o * \omega_K) = \int (X*X)(\sigma_k(f_o))\, d\omega_K(k) > 0$.
[Wegen $f_o \geq 0$ und $f_o|K = 0$ ist für alle $k \in K$ $(X*X)(\sigma_k(f_o)) \geq 0$,
es gilt $(X*X)(\sigma_1(f_o)) = (X*X)(f_o) > 0$ und die Abbildung
$k \to \sigma_k(f_o)$ von K in D(G) ist stetig nach [3], Prop. 3.]
Auf analoge Weise kommt man schließlich zu
$(\omega_K * X * X * \omega_K)(f_o) = X*X(\omega_K * f_o * \omega_K) > 0$.
$T' := \omega_K * X * X * \omega_K$ ist also eine lokale, 1_K-dissipative Distribution mit $T'^* = T'$. Wegen $T'(1_G) = 0$ ist T' echt K-quadratisch.

(III) Wenn χ ein beliebiger Charakter auf G ist, wählt man eine Funktion $\phi \in D(G;\chi)$ mit $1 = \phi(1) = \|\phi\|_\infty$ und $\tilde{\phi} = \bar{\phi}$.
$T := \bar{\phi} \cdot T'$ ist dann χ-quadratisch. □

(3.5) Notation: Sei χ ein Charakter auf einer kompakten Untergruppe von G. Mit N_χ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in D(G;\chi)$ mit $T(f)=0$ für alle $T \in P(G;\chi)$; es gelte die Abkürzung $N_K := N_{1_K}$.
M_K sei die Menge aller $f \in D(G;K)$ mit $f \geq 0 = f(1)$.

(3.6) Bemerkung: Wegen (2.10) gilt $f \in N_\chi$ genau dann, wenn $f \in D(G;\chi)$, $f(1)=0$ und $\frac{d}{dt} f(g_t)|_{t=0} = 0$ für jede Einparameteruntergruppe $(g_t : t \in \mathbb{R})$ von G.

(3.7) Hilfssatz:
a) Für jedes $f \in N_\chi$ existiert ein $f_o \in M_K$ mit $|f| \leq f_o$.
b) $N_K = \langle M_K \rangle$.

Beweis: a) Zuerst sei G eine Lie-Gruppe. Der homogene Raum G/K trägt dann die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit,

und wegen $|f|^2 \in M_K$ gehört $f': gK \to |f(g)|^2$ zu $D(G/K)$
und erfüllt $f' \geq 0 = f'(1K)$.
Sei nun $\psi : U \to V$ ein Diffeomorphismus von kompakten Umgebungen $U := \overline{B_\varepsilon(0)}$ der 0 in $\mathbb{R}^n$ bzw. V von $1K$ in G/K.
Dann sind die ersten bis dritten Ableitungen von $f'\circ\psi$ im Ursprung sämtlich 0. Nach der Taylor-Formel gibt es ein $M\geq 0$ mit
$|f'(\psi(x))| \leq M^2 \cdot ||x||_2^4$ für alle $x\in U$.
Für $f'' : gK \to |f(g)|$ gilt somit
$|f''(\psi(x))| \leq M\cdot||x||_2^2$ für alle $x\in U$.
Seien $m := ||f||_\infty + M\varepsilon^2$, $f_1 \in D_{\mathbb{R}}^+(G/K)$ eine Funktion, die auf $V \cup \operatorname{supp}(f'')$ konstant 1 ist und $f_2 \in D_{\mathbb{R}}^+(G/K)$ eine Funktion mit Träger in V und $f_2(1K) = 1 \geq f_2$.
Wir setzen
$f_3(g) := mf_1(gK)(1-f_2(gK)) + M\cdot f_2(gK)\cdot ||\psi^{-1}(gK)||_2^2$ für alle $g\in G$.
Es gilt $f_3 \in D_{\mathbb{R}}^+(G)$ und $f_3(k)=0$ für alle $k\in K$.
Wenn $gK \in V$, so gilt $f_3(g) \geq M\cdot||\psi^{-1}(gK)||_2^2 \geq f''(gK) = |f(g)|$,
wenn $gK \in \operatorname{supp}(f')\setminus V$, so gilt $f_3(g) = m \geq ||f||_\infty \geq |f(g)|$
und für alle übrigen $g\in G$ gilt $f_3(g) \geq 0 = f(g)$.
Zusammengenommen hat man also $f_o := \omega_K * f_3 \geq |f|$ mit $f_o \in M_K$.

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall, daß G Lie-projektiv ist. Dann gibt es einen kompakten Normalteiler N von G, sodaß G/N eine Lie-Gruppe ist und ein $f_N \in D(G/N)$ mit $f = f_N\circ\pi_N$ existiert. Es gilt oBdA $K\cap N \subset \operatorname{Ker}\chi$ (andernfalls folgt $f=0$ und es ist nichts zu beweisen). Man kann $\chi_N(kN) := \chi(k)$ für alle $k\in K$ definieren und erhält $f_N \in D(G/N;\chi_N)$ und $T(f_N)=0$ für alle $T \in P(G/N;\chi_N)$ wegen (2.16) c).
Deshalb existiert eine Funktion $f_N' \in D(G/N;KN/N)$ mit $|f_N| \leq f_N'$

und $f'_N(1N)=0$. $f_o := f'_N \circ \pi_N$ leistet dann das Gewünschte.

Zuletzt betrachten wir eine beliebige lokalkompakte Gruppe G, die nach (1.14) eine offene Lie-projektive Untergruppe $G_o \supset K$ enthält. Wir bekommen ein $f'_o \in D(G_o;K)$ mit $f'_o(1)=0$ und $f'_o \geq |f|G_o|$. Es gibt $g_j \in G$ $(j \in n)$ mit $g_o = 1$ und $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{j\in n} g_j G_o$ sowie eine Funktion $f_1 \in D^+(G_o)$, die auf $G_o \cap \bigcup_{j\in n} g_j^{-1}\mathrm{supp}(f)$ größer als $\|f\|_\infty$ ist.

Definiert man $f'(g) := \begin{cases} f'_o(g) & \text{falls } g \in G_o, \\ f_1(g_j^{-1}g) & \text{falls } g \in g_j G_o \text{ und } j\geq 1, \\ 0 & \text{falls } g \notin \bigcup_{j\in n} g_j G_o, \end{cases}$

so gilt $f' \in D^+(G)$ und $f'(k)=0$ für alle $k \in K$.

Man hat auch $|f| \leq f'$, denn auf G_o und $\bigcup_{j\in n} g_j G_o$ ist dies klar, und für $g \in g_j G_o$ ist entweder $g \in \mathrm{supp}(f)$ und $f'(g) = f_1(g_j^{-1}g) \geq \|f\|_\infty \geq |f(g)|$, oder $f(g) = 0$.

$f_o := \omega_K * f' * \omega_K$ leistet also das Gewünschte.

b) Die Inklusion $M_K \subset N_K$ ist klar. Sei umgekehrt $f \in N_K$. Dann gilt $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in N_K$; es existieren daher nach a) Funktionen $f_o, f_1 \in M_K$ mit $|\mathrm{Im}\, f| \leq f_o$ und $|\mathrm{Re}\, f| \leq f_1$.

Daraus folgt $(f_o - \mathrm{Im}\, f) \in M_K$, $(f_1 - \mathrm{Re}\, f) \in M_K$ und

$f = f_1 - (f_1 - \mathrm{Re}\, f) + i f_o - i(f_o - \mathrm{Im}\, f) \in \langle M_K \rangle$. □

(3.8) Satz: Sei T eine 1_K-dissipative Distribution auf G.

a) Äquivalent sind:

(i) T ist echt K-primitiv,

(ii) $T(f_o \tilde{f}_1) = T(f_o)f_1(1) - T(f_1)f_o(1)$

für alle $f_o, f_1 \in D(G;K)$.

b) Äquivalent sind:

(iii) T ist echt K-quadratisch,

(iv) $T(f_o f_1)+T(f_o \tilde{f}_1) = 2T(f_o)f_1(1) + 2T(f_1)f_o(1)$

für alle $f_o, f_1 \in D(G;K)$.

Beweis: a) (i)⇒(ii): Nach (2.10) existiert eine Einparameteruntergruppe $(g_t : t \in \mathbb{R})$ von G mit

$T(f) = \frac{d}{dt} f(g_t)|_{t=o}$ für alle $f \in D(G;K)$.

Für alle $f_o, f_1 \in D(G;K)$ gilt somit

$$T(f_o \tilde{f}_1) = \frac{d}{dt}(f_o(g_t)f_1(g_{-t}))|_{t-o}$$
$$= \frac{d}{dt} f_o(g_t)|_{t=o} f_1(1) - f_o(1) \frac{d}{dt} f_1(g_t)|_{t=o}$$
$$= T(f_o)f_1(1) - T(f_1)f_o(1).$$

(ii)⇒(i): Sei $\phi \in D(G;K)$ mit $\phi = \tilde{\phi}$.

Dann gilt $T(\phi^2) = T(\phi)\phi(1)-T(\phi)\phi(1) = 0$.

Nach [5], Lemme 1 kann man für jedes $\varepsilon>0$ die Funktion ϕ so wählen, daß $|T(1_G)-T(\phi^2)| < \varepsilon$. Daraus folgt $T(1_G)=0$, T ist also positiv normiert und nach (1.10) ein verallgemeinerter K-Laplace-Operator. Insbesondere ist T reell.

Sei nun $f \in D(G;K)$ beliebig und $\phi \in D(G;K)$ so gewählt, daß $\phi = \tilde{\phi}$ und $\phi=1$ auf $K \cup \mathrm{supp}(f)$. Dann gilt

$T^*(f) = \check{T}(f) = T(\tilde{f}) = T(\phi^2 \tilde{f}) = T(\phi^2)f(1)-T(f)\phi^2(1) = -T(f)$,

das heißt $T^* = -T$.

b) (iii)⇒(iv): Zuerst wird (iv) in einigen Spezialfällen bewiesen:

(1) (iv) gilt, wenn $f_o \in M_K$ und $f_1(1)=0$.

[[Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es eine Umgebung von K, auf der $f_1 \leq \varepsilon$, das heißt $f_o(f_1-\varepsilon) \leq 0 = (f_o(f_1-\varepsilon))(1)$.

Da T ein lokaler verallgemeinerter K-Laplace-Operator ist, folgt

$T(f_o(f_1-\varepsilon)) \leq 0$ für alle $\varepsilon>0$, also

$T(f_o f_1) \leq 0$. Da diese Ungleichung auch für $-f_1$, $\tilde{f}_1$ und $-\tilde{f}_1$ statt für f_1 richtig ist, gilt

$T(f_o f_1) = T(f_o \tilde{f}_1) = 0$ und schließlich

$T(f_o f_1) + T(f_o \tilde{f}_1) = 0 = 2T(f_o)f_1(1) + 2T(f_1)f_o(1).$]

(2) (iv) gilt, wenn $\tilde{f}_o = -f_o$.

[Aus $T(f_o)=T^*(f_o)=T(\tilde{f}_o)=-T(f_o)$ folgt $T(f_o)=0$. Deshalb gilt

$T(f_o f_1)+T(f_o \tilde{f}_1) = T(f_o f_1)+T(\tilde{f}_o f_1) = T(f_o f_1)-T(f_o f_1) = 0$

$= 2T(f_o)f_1(1) + 2T(f_1)f_o(1).$]

(3) (iv) gilt, wenn f_o auf einer Umgebung von $K_U supp(f_1)$ konstant =1 ist.

[Da T lokal und positiv normiert ist, gilt $T(f_o)=0$. Deshalb ist

$T(f_o f_1)+T(f_o \tilde{f}_1) = 2T(f_1) = 2T(f_o)f_1(1)+2T(f_1)f_o(1).$]

Entscheidend für den Beweis ist nun, daß sowohl die rechte, als auch die linke Seite von (iv) eine symmetrische Bilinearform von (f_o,f_1) sind. Deshalb folgt aus (1) und (3.7) b), daß (iv) für alle $f_o,f_1 \in D(G;K)$ mit $\tilde{f}_o = f_o$ und $f_o(1)=f_1(1)=0$ gilt; wegen (2) gilt (iv) für alle $f_o,f_1 \in D(G;K)$ mit $f_o(1)=f_1(1)=0$ und für beliebige $f_o,f_1 \in D(G;K)$ folgt (iv) durch zweimalige Anwendung von (3).

(iv)$\Rightarrow$(iii): Zuerst wird gezeigt, daß T lokal ist.

Sei $g \notin K$, dann kann man Umgebungen $U_o = KU_oK$ von g und $U_1 = KU_1K$ von 1 mit $U_o \cap U_1 = \emptyset$ und eine Funktion $\phi \in D(G;K)$ mit $\phi=\tilde{\phi}$, $\phi(1)=1$ und $supp(\phi) \subset U_1$ wählen. Für alle $f \in D(G;K)$ mit Träger in U_o gilt dann $f\cdot\phi = f\cdot\tilde{\phi} = 0$ und deshalb wegen (iv)

$T(f) = T(f)\phi(1)+T(\phi)f(1) = \frac{1}{2}(T(f\phi)+T(f\tilde{\phi})) = 0.$

Um zu zeigen, daß T positiv normiert ist, wählt man eine Funktion $\phi \in D(G;K)$, die auf einer Umgebung von K konstant =1 ist. Da T lokal ist, folgt

$2T(\phi) = T(\phi\cdot\phi) + T(\phi\cdot\tilde{\phi}) = 2T(\phi)\phi(1) + 2T(\phi)\phi(1) = 4T(\phi).$

Deshalb ist $T(\phi)=0$, woraus $T(1_G)=0$ folgt.

Zuletzt wird $T^*= T$ gezeigt. Sei $f \in D(G;K)$ beliebig und $\phi \in D(G;K)$ so gewählt, daß auf einer Umgebung von $K \cup \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(\tilde{f})$ $\phi=1$ gilt. Es folgt $T(\phi)=0$ und

$T(f) + T(\tilde{f}) = T(\phi f) + T(\phi\tilde{f}) = 2T(f)\phi(1) + T(\phi)f(1) = 2T(f).$

Deswegen ist $T(f) = T(\tilde{f})$ für alle $f \in D(G;K)$ und folglich $T = \check{T} = T^*$. □

4. Lévy-Maße

In (4.1) wird eine abstrakte Definition komplexer Lévy-Maße gegeben. Es wird bewiesen, daß für Lévy-Maße ein Satz von Roth gilt (4.4). Obwohl im allgemeinen ein Lévy-Maß η nicht σ-endlich zu sein braucht, besitzt η stets eine Dichte bezüglich $|\eta|$. Durch diese Dichte werden Lévy-Maße in (4.9) charakterisiert. In (4.12) wird gezeigt, daß man jeder χ-dissipativen Distribution ein Lévy-Maß zuordnen kann. Die Umkehrung, daß jedes abstrakte Lévy-Maß das Lévy-Maß einer χ-dissipativen Distribution ist, wird erst in (6.2) bewiesen.

(4.1) Definition: Seien χ ein Charakter auf einer kompakten Untergruppe K von G und $\phi \in D(G;\chi)$ mit $\phi(1)=1$.
Ein komplexes Radon-Maß η auf $G\backslash K$ heißt χ-Lévy-Maß, wenn

(LM1) $\tau_k(\eta)=\sigma_k(\eta)=\overline{\chi(k)}\cdot\eta$ für alle $k\in K$,

(LM2) $f|(G\backslash K) \in L^1(\eta)$ für alle $f\in N_\chi$,

(LM3) $|\eta|(\complement U) < \infty$ für jede offene Umgebung U von K,

(LM4) $|\phi\cdot\eta| - \mathrm{Re}(\phi\cdot\eta) \in M^b(G\backslash K)$.

(4.2) Wir werden später (4.7) sehen, daß diese Definition nicht von der speziellen Wahl der Funktion ϕ abhängt. Im Falle $\chi=1_K$ kann man anstelle von (LM4) die äquivalente Bedingung

(LM4') $|\eta| - \mathrm{Re}\,\eta \in M^b(G\backslash K)$

verwenden.

(4.3) Sind sowohl η als auch $-\eta$ χ-Lévy-Maße, so folgt aus (LM4), daß η ein endliches Maß ist. Da im allgemeinen auch unendliche χ-Lévy-Maße existieren (4.10), ist (LM4) von den übrigen Bedingen der Definition unabhängig.

Es folgen zwei Eigenschaften von χ-Lévy-Maßen:

(4.4) Die Menge der χ-Lévy-Maße bildet einen positiven Kegel.

(4.5) Für jedes χ-Lévy-Maß η und jede beschränkte, meßbare Funktion f auf $G\setminus K$ mit $f\geq 0$ und $\sigma_k(f)=\tau_k(f)=f$ für alle $k\in K$ ist $f\cdot\eta$ ein χ-Lévy-Maß.

Um nun für χ-Lévy-Maße eine zum Satz von Roth (1.13) analoge Aussage zu formulieren, müssen einige Bezeichnungen vereinbart werden.

(4.6) Bezeichnungen: Es gelte weiterhin das in (1.12) Vereinbarte. Für jede Funktion f auf $G\setminus K$ sei

$Zf : (G\times\mathbb{T})\setminus K' \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$(g,z) \to \begin{cases} z\cdot f(g) & \text{falls } g \notin K \\ 0 & \text{falls } (g,z) \in (K\times\mathbb{T})\setminus K' \end{cases}$$

Für alle $f \in K(G\setminus K)$ gilt also $Zf \in K((G\times\mathbb{T})\setminus K')$.

Sei η' ein Radon-Maß auf $(G\times\mathbb{T})\setminus K'$. Dann ist durch

$Z\eta' : f \to \eta'(Zf)$ für alle $f\in K(G\setminus K)$

ein Radon-Maß auf $G\setminus K$ definiert.

(4.7) Satz: Für ein Radon-Maß η auf $G\setminus K$ sind äquivalent:

(i) η ist ein χ-Lévy-Maß,

(ii) Es existiert ein positives $1_{K'}$-Lévy-Maß η' auf $(G\times\mathbb{T})\setminus K'$ mit $\eta = Z\eta'$.

Beweis: (I) Wir nehmen zuerst an, daß $\chi=1_K$ gilt - daraus folgt $K' = K\times\{1\}$ - und beweisen die Äquivalenz von (ii) mit der folgenden Bedingung

(i') erfüllt (LM1), (LM2), (LM3) und (LM4').

(ii) $\Rightarrow$ (i'): Die Bedingung (LM1) folgt aus den Gleichungen

$\sigma_k(Z\eta') = Z\sigma_{(k,1)}\eta'$ und $\tau_k(Z\eta') = Z\tau_{(k,1)}\eta'$ für alle $k \in K$.

Analog zu (4.6) bezeichnen $B\eta'$ bzw. $R\eta'$ die Radon-Maße

$f \to \int f(g)\, d\eta'(g,z)$ bzw. $f \to \int \mathrm{Re}(z) f(g)\, d\eta'(g,z)$

auf $G \setminus K$. Es gilt

$|\eta| \leq B\eta'$ und $\mathrm{Re}\ \eta = R\eta'$, also

$0 \leq |\eta| - \mathrm{Re}\ \eta \leq B\eta' - R\eta'$.

Daraus folgt wegen der Gültigkeit von (LM2) für η'

$\| |\eta| - \mathrm{Re}\ \eta \| = (|\eta| - \mathrm{Re}\ \eta)(G \setminus K) \leq \int (1 - \mathrm{Re}(z))\, d\eta'(g,z) < \infty$.

Deshalb gilt (LM4) für η.

Zum Beweis von (LM2) genügt es wegen (3.7) b), für alle $f \in M_K$ $|\eta|(f) < \infty$ zu zeigen. Die Funktion

$f': (g,z) \to f(g)$ auf $G \times \mathbb{T}$

gehört zu $M_{K'}$; da η' die Bedingung (LM2) erfüllt, gilt

$|\eta|(f) \leq B\eta'(f) = \eta'(f') < \infty$.

Man sieht leicht, daß (LM3) aus der entsprechenden Bedingung für η' folgt.

(i') $\Rightarrow$ (ii): Als erstes beobachtet man, daß $\mathrm{Im}\ \eta$ von $|\eta| - \mathrm{Re}\ \eta$ dominiert wird. Daraus folgt, daß der Träger von $\mathrm{Im}\ \eta$ im Träger von $|\eta| - \mathrm{Re}\ \eta$ enthalten ist. Da $|\eta| - \mathrm{Re}\ \eta$ endlich ist, ist letzterer Vereinigung einer Folge von kompakten Mengen K_n ($n \in \mathbb{N}$) und einer Nullmenge N bezüglich $|\eta| - \mathrm{Re}\ \eta$. Da $\mathrm{Im}\ \eta$ ein Radon-Maß ist, ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $|\mathrm{Im}\ \eta|(K_n)$ endlich; außerdem gilt $|\mathrm{Im}\ \eta|(N) = 0$.

Damit wissen wir, daß $\mathrm{Im}\ \eta$ σ-endlich ist. $(\mathrm{Re}\ \eta)^-$ ist wegen

$2(\mathrm{Re}\ \eta)^- \leq |\eta| - \mathrm{Re}\ \eta$

endlich, es existiert damit eine σ-kompakte Menge M, auf die

$|\mathrm{Im}\ \eta| + (\mathrm{Re}\ \eta)^-$ konzentriert ist. Deshalb ist $1_{\complement M}\eta$ ein positives Maß und $1_M\eta$ ein σ-endliches Maß.

Sei nun ψ_o eine Dichte von $1_M\eta$ bezüglich $|1_M\eta|$. Dann ist $\psi := \psi_o 1_M + 1_{\complement M}$ eine Dichte von η bezüglich $|\eta|$. Nach Modifikation auf einer $|\eta|$-Nullmenge nimmt ψ nur Werte aus $\mathbb{T}$ an.

Für alle $k\in K$ gilt

$\psi(gk) = \psi(kg) = \psi(g)$ für $|\eta|$-fast alle $g\in G$.

Nun definieren wir $\eta' \in M^+((G\times\mathbb{T})\setminus K')$ durch

$\eta'(f) := \int_{G/K} f(g,\psi(g))\, d|\eta|(g)$ für alle $f \in K((G\times\mathbb{T})\setminus K')$.

Als erstes beweisen wir die Existenz von $\eta'(f)$ und die Stetigkeit von η'. Sei dazu $M_o \subset (G\times\mathbb{T})\setminus K'$ kompakt und $\mathrm{supp}(f)\subset M_o$. Dann existiert eine Umgebung U von K und ein $\varepsilon>0$, derart daß M_o und $U\times B_\varepsilon(1)$ disjunkt sind, und es ergibt sich

$$\int_{G/K} |f(g,\psi(g))|\, d|\eta|(g)$$
$$= \int_{G/K} |f(g,\psi(g))|\, 1_{\complement U\times B_\varepsilon(1)}(g,\psi(g))\, d|\eta|(g)$$
$$\le \int_{G/K} |f(g,\psi(g))|\, 1_{\complement U}(g)\, d|\eta|(g) + \int_{G/K} |f(g,\psi(g))|\, 1_{\complement B_\varepsilon(1)}(\psi(g))\, d|\eta|(g)$$
$$\le \|f\|_\infty (|\eta|(\complement U) + |\eta|(\{g\in G : |\psi(g) - 1| > \varepsilon\}))$$
$$\le \|f\|_\infty (|\eta|(\complement U) + \frac{2}{\varepsilon^2} \| |\eta| - \mathrm{Re}\ \eta\|).$$

Da die Abbildung $g \to f(g,\psi(g))$ meßbar ist, folgt daraus die $|\eta|$-Integrierbarkeit dieser Abbildung, und, da die Konstante des letzten Terms nur von M_o aber nicht von f abhängt, die Stetigkeit von η'. Also ist η' ein Radon-Maß auf $(G\times\mathbb{T})\setminus K'$.

Die K'-Invarianz von η' folgt nun aus der $|\eta|$-fast sicheren K-Invarianz von η. η' erfüllt also (LM1).

Für jede Umgebung U' von K' existieren eine Umgebung U von K und ein $\varepsilon>0$ mit $U' \supset U\times B_\varepsilon(1)$. Es folgt

$$\eta'(\complement U') \le \eta'(\complement U \times B_\varepsilon(1))$$
$$< |\eta|(\complement U) + |\eta|(\{g\in G : |\psi(g) - 1| > \varepsilon\})$$
$$\le |\eta|(\complement U) + \frac{2}{\varepsilon^2} \| |\eta| - \mathrm{Re}\,\eta \| < \infty \text{ , das heißt (LM3).}$$

Von den beiden übrigen Bedingungen (LM2) und (LM4) für Lévy-Maße erfüllt η' als positives Maß die letzte automatisch. (LM2) muß wegen (3.7) b) nur für alle $f\in M_{K'}$ nachgewiesen werden. Nun existieren stets eine Funktion $f_o \in M_K$ und ein $a\ge 0$, sodaß

$f(g,z) \le f_o(g) + a\cdot\mathrm{Re}(1-z)$ für alle $g\in G$ und $z\in\mathbb{T}$.

Folglich gilt

$$\int f\,d\eta' \le \int f_o\,d\eta + a\int \mathrm{Re}(1-z)\,d\eta'(g,z)$$
$$= \int f_o\,d\eta + a\cdot\| |\eta| - \mathrm{Re}\,\eta \| < \infty .$$

Deshalb ist jedes $f\in M_{K'}$ in $L^1(\eta')$.

Damit ist gezeigt, daß η' ein $1_{K'}$-Lévy-Maß ist.

Für alle $f\in K(G\setminus K)$ gilt

$$\eta(f) = \int_{G\setminus K} f(g)\psi(g)\,d|\eta|(g) = \int_{G\setminus K} Zf(g,\psi(g))\,d|\eta|(g) = \eta'(Zf)$$

und damit

$$\eta = Z\eta'.$$

(II) Nun betrachten wir den allgemeinen Fall mit beliebigem χ. ϕ sei die Funktion aus der Definition (4.1). Wegen (LM3), (4.4) und der Tatsache, daß jedes endliche Maß mit (LM1) ein χ-Lévy-Maß ist, können wir im Beweis der Äquivalenz von (i) und (ii) oBdA annehmen, daß die Träger von η bzw. η' in $\{g\in G: |\phi(g)|>\frac{1}{2}\}$ bzw. in $\{g\in G: |\phi(g)|>\frac{1}{2}\}\times\mathbb{T}$ liegen. Ψ sei die stetige Abbildung

$$(g,z) \to \left(g, z\frac{\phi(g)}{|\phi(g)|}\right) \quad \text{von } \{g\in G: |\phi(g)|>\tfrac{1}{2}\}\times\mathbb{T} \text{ in sich.}$$

((i)⇒(ii)): Das Maß $\phi\cdot\eta$ erfüllt (LM1), (LM2), (LM3) und (LM4'). Nach dem bisher Bewiesenen existiert also ein positives $1_{K'}$-Lévy-Maß η'' mit Träger in $\{g\in G: |\phi(g)|>\frac{1}{2}\}\times\mathbb{T}$ und $\phi\eta = Z\eta''$.

Da die Funktion $\frac{1}{|\phi|}$ auf dem Träger von η beschränkt ist, ist $(\frac{1}{|\phi|} \otimes 1_{\mathbb{T}})\eta''$ nach (4.5) ein $1_{K\times\{1\}}$-Lévy-Maß. Schließlich ist $\eta' := \Psi^{-1}((\frac{1}{|\phi|} \otimes 1_{\mathbb{T}})\eta'')$ ein positives $1_{K'}$-Lévy-Maß.

[[(LM1) und (LM4) sind klar. (LM3) folgt daraus, daß Ψ ein Homöomorphismus ist, der K' auf K×{1} abbildet. (LM2) folgt daraus, daß die Abbildung $f \to f\circ\Psi^{-1}$ die Menge aller Funktionen aus $M_{K'}$, deren Träger in $\{g\in G:|\psi(g)|>1/2\}\times\mathbb{T}$ liegt, in $M_{K\times\{1\}}$ abbildet.]]

Aus

$$\begin{aligned} Z\eta'(f) &= \int (Zf)\circ\Psi^{-1}(g,z)\,\frac{1}{|\phi(g)|}\,d\eta''(g,z) \\ &= \int z\,\frac{\overline{\phi(g)}}{|\phi(g)|^2}\,f(g)\,d\eta''(g,z) \\ &= \int z\,\frac{f(g)}{\phi(g)}\,d\eta''(g,z) \\ &= Z\eta''(f/\phi) \\ &= \phi\eta(f/\phi) \\ &= \eta(f) \end{aligned}$$

für alle Funktionen $f\in K(G\setminus K)$, deren Träger in $\{g\in G:|\psi(g)|>1/2\}$ liegt, folgt schließlich $\eta=Z\eta'$.

(ii)⇒(i): Für das $1_{K\times\{1\}}$-Lévy-Maß $\eta'' := \Psi((|\phi| \otimes 1_{\mathbb{T}})\eta')$ gilt $\phi\eta = Z\eta''$, wie man leicht analog dem obigen beweist.
Wegen I erfüllt $\phi\eta$ die Bedingungen (LM1), (LM2), (LM3) und (LM4'). Daraus folgt, daß η ein χ-Lévy-Maß ist. □

(4.8) Korollar: Seien χ,χ' Charaktere auf K, $\phi\in D(G;\chi')$ mit $\phi(1)=1$ und η ein Radon-Maß auf G\K mit

$$\sigma_k(\eta) = \tau_k(\eta) = \overline{\chi(k)}\cdot\eta \quad \text{für alle } k\in K$$

Dann sind äquivalent:

(i) η ist ein χ-Lévy-Maß.

(ii) $\phi\eta$ ist ein $\chi\overline{\chi'}$-Lévy-Maß und $|\eta|(\{g\in G:|\phi(g)|<1/2\}) < \infty$.

Der Beweis des Korollars erfolgt mit der selben Methode wie im zweiten Teil des Beweises von (4.7).

(4.9) Korollar: Es sind äquivalent

(i) η ist ein 1_K-Lévy-Maß.

(ii) Es gelten (LM1), (LM2), (LM3) und η besitzt eine Dichte ϕ bezüglich $|\eta|$ mit $1-\phi \in L^2(\eta)$.

Der Beweis folgt aus $|\eta| - \operatorname{Re}\eta = (1-\operatorname{Re}\phi)\cdot|\eta|$ und $1 - \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}|1-z|^2$ für alle $z\in\mathbb{T}$. □

Die Existenz einer Dichte eines χ-Lévy-Maßes bezüglich seines Absolutbetrags kann im allgemeinen nicht direkt aus dem Satz von Radon-Nikodym geschlossen werden. Ein χ-Lévy-Maß muß nämlich nicht σ-endlich sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

(4.10) Beispiel eines nicht σ-endlichen $1_{\{1\}}$-Lévy-Maßes.
(vgl. dazu [16], Corollary 5)
Seien G die kompakte Gruppe $\mathbb{T}^{\mathbb{R}}$ (mit der Produkttopologie) und $K := \{1\}$. G ist Lie-projektiv, denn für jede endliche Menge $I \subset \mathbb{R}$ ist $L_I := \{x\in G : x(j)=1 \text{ für alle } j\in I\}$ ein kompakter Normalteiler mit $G/L_I \cong \mathbb{T}^I$ und
$\bigcap\{L_I : I \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} = \{1\}$.
Umgekehrt gilt aber auch dies: Ist L eine kompakte Untergruppe von G und G/L eine Lie-Gruppe, so gibt es eine endliche Teilmenge I von $\mathbb{R}$ mit $L_I \subset L$.
Für jedes $r\in\mathbb{R}$ sei x_r das durch $x_r(s) := 1-2\delta_{rs}$ definierte Element von G. Die Menge $\{x_r : r\in\mathbb{R}\}$ ist diskret, ihr einziger Häufungspunkt ist 1, also ist durch

$\eta := \sum_{r\in\mathbb{R}} \varepsilon_{x_r}$ ein nicht σ-endliches positives Maß auf $G\setminus K$

definiert.

η ist ein Lévy-Maß:

Sei nämlich U eine Umgebung der 1, dann gibt es eine endliche Teilmenge I von $\mathbb{R}$ und ein $\varepsilon>0$ mit

$\{x\in G : x(j)\in B_\varepsilon(1) \text{ für alle } j\in I\} \subset U$.

Daraus folgt aber (LM3), denn

$$\eta(\complement U) \le \eta(\complement\{x\in G: x(j)\in B_\varepsilon(1) \text{ für alle } j\in I\})$$
$$= \eta(\{x\in G: x(j)\notin B_\varepsilon(1) \text{ für mindestens ein } j\in I\})$$
$$\le \eta(\{x_r : r\in I\}) < \infty, \text{ da I eine endliche Menge ist.}$$

Zum Beweis von (LM2) betrachten wir eine Funktion $f\in D(G)$ mit $f(1) = 0 \le f$. Da G Lie-projektiv ist, existiert ein kompakter Normalteiler L von G, für den G/L eine Lie-Gruppe ist und

$f(gl) = f(g)$ für alle $g\in G$ und $l\in L$ gilt.

Oben sahen wir, daß eine endliche Teilmenge I von $\mathbb{R}$ existiert mit $L_I \subset L$. Für alle $r\notin I$ gilt $x_r\in L_I$, also $f(x_r)=f(x_r 1)=f(1)=0$.

Damit folgt $0 \le \int f\, d\eta = \sum_{r\in I} f(x_r) < \infty$,

also $f\in L^1(\eta)$. □

(4.11) Bemerkung: Für jedes 1_K-Lévy-Maß η ist $(\mathrm{Re}\,\eta)^-$ endlich, $\mathrm{Im}\,\eta$ σ-endlich und für alle $f\in D(G;K)$ mit $f(1)=0$ gilt $f\in L^1(\mathrm{Im}\,\eta)$.

Beweis: Die Endlichkeit von $(\mathrm{Re}\,\eta)^-$ und die σ-Endlichkeit von $\mathrm{Im}\,\eta$ wurden bereits im Beweis der Implikation (i')⇒(ii) in (4.7) gezeigt. Die letzte Behauptung braucht nur für reelle $f\in D(G;K)$ nachgewiesen werden. Es sei $\phi\in D(G;K)$ reell und erfülle $\phi(1)=1$. Dann gilt wegen (4.2) und (LM4)

$$|(\phi+if)\eta| - \mathrm{Re}((\phi+if)\eta) \in M^b(G\setminus K) \quad \text{und}$$
$$|(\phi+if)\eta| - \mathrm{Re}\left(\frac{\phi}{|\phi|}|\phi+if|\cdot\eta\right) = \frac{|\phi+if|}{|\phi|}(|\phi\eta|-\mathrm{Re}(\phi\eta)) \in M^b(G\setminus K).$$

Die Differenz zweier endlicher Maße ist wieder endlich, also ist

$\mathrm{Re}(\phi(\frac{|\phi+if|}{|\phi|} - 1)\eta - if\eta) \quad \in \quad M^b(G\setminus K)$.

Wegen (LM2) gilt

$(\frac{|\phi+if|}{|\phi|} - 1)\cdot\eta \quad \in \quad M^b(G\setminus K)$ und deshalb

$\mathrm{Re}(if\eta) \quad \in \quad M^b(G\setminus K)$.

Dies besagt aber gerade, daß $f \in L^1(\mathrm{Im}\ \eta)$. □

Nach diesen Eigenschaften von χ-Lévy-Maßen wird im folgenden Satz der Zusammenhang zu χ-dissipativen Distributionen hergestellt.

(4.12) Satz und Definition: Sei T eine χ-dissipative Distribution auf G. Dann läßt sich die Abbildung, die jeder Funktion $f\in D(G)$, welche in einer Umgebung von K verschwindet, T(f) zuordnet, zu einem Radon-Maß η auf $G\setminus K$ fortsetzen. η ist ein χ-Lévy-Maß. Es heißt das Lévy-Maß der Distribution T.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus [5], Lemme 1.

Nach (1.13) existiert eine positiv normierte $1_{K'}$-dissipative Distribution $T' \in D(G\times\mathbb{T};K')$ mit $T = ZT'$. η' sei das Lévy-Maß von T'. Wenn $f\in D(G)$ in einer Umgebung von K verschwindet, so verschwindet Zf in einer Umgebung von K', und es gilt

$\eta(f|(G\setminus K)) = T(f) = T'(Zf) = \eta'(Zf|((G\times\mathbb{T})\setminus K')) = \eta'(Z(f|(G\setminus K)))$.

Durch Grenzübergang bekommt man

$\eta(f|(G\setminus K)) = \eta'(Z(f|(G\setminus K)))$ für alle $f \in K(G\setminus K)$, d.h. $\eta = Z\eta'$.

Nach (4.7) ist nur noch zu zeigen, daß η' ein positives $1_{K'}$-Lévy-Maß ist. Da T' positiv normiert ist, ist $\eta' \geq 0$; es folgt (LM4). (LM1) folgt aus $T' \in D'(G\times\mathbb{T};K')$, (LM3) läßt sich von [5], Lemme 1 ableiten.

Zum Beweis von (LM2) sei $f \in M_{K'}$, d.h. $f \in D(G\times\mathbb{T};K')$ und $f(1) = 0 \leq f$. Für alle Funktionen $\phi \in D(G\times\mathbb{T};K')$, mit $0 \leq \phi \leq 1$, die in einer Umgebung von K konstant =1 sind, gilt

$(f\phi)(1) = 0 \leq f\phi$, also

$T'(f\phi) \geq 0$ und

$T'((1-\phi)f) \leq T'(f)$. Daraus folgt aber

$\eta'(f|((G\times\mathbb{T})\setminus K')) = \sup_{\phi} T'((1-\phi)f) \leq T'(f)$,

das heißt $f|((G\times\mathbb{T})\setminus K') \in L^1(\eta')$. □

(4.13) Bemerkung: Die Umkehrung dieses Satzes geschieht in (6.2).

(4.14) Korollar: Sei η' das Lévy-Maß der Distribution $T' \in D'(G\times\mathbb{T};K')$. Dann ist $Z\eta'$ das Lévy-Maß von ZT'.

(4.15) Sei η das Lévy-Maß einer χ-dissipativen Distribution $T\neq 0$. Dann gilt

$\mathrm{supp}(T) = \mathrm{supp}(\eta) \cup K$.

5. Lévy-Abbildungen

Dieser Paragraph bringt die Definition (5.1) und den Existenzbeweis (5.13) von Lévy-Abbildungen. Der Beweis für die Existenz orientiert sich an [24], der entscheidende Schritt ist das Hochziehen einer Lévy-Abbildung von einer Faktorgruppe auf die Gruppe selbst (5.12). Die Definition weicht aus mehreren Gründen von der in [24] ab. Zum einen ist es im Fall eines nicht-reellen Idempotents $\mu_o = \chi\omega_K$ nicht möglich, einen zur echten Primitivität (die dem Begriff der primitiven Form in [24] entspricht) analogen Begriff zu definieren, weshalb der konstante Term in der Funktion g in [24], Lemma 6 in die Lévy-Abbildung eingegliedert werden muß. Zum andern muß die Definition auf eine Anwendung des Satzes von Roth (1.13) abgestimmt werden. Deshalb wird für Lévy-Abbildungen der Begriff der Verträglichkeit eingeführt.

(5.1) Definition: Lévy-Abbildung für $(G;\chi)$ heißt jede lineare Abbildung Γ von $D(G;\chi)$ in sich mit

(LA1) $T(\Gamma(f)) = T(f)$ für alle $T \in P(G;\chi)$ und $f \in D(G;\chi)$,

(LA2) $(f \to \Gamma(\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K)(g)) \in P_{\mathfrak{C}}(G;\chi)$ für alle $g \in G$.

Im Falle $\chi = 1_K$ spricht man von einer Lévy-Abbildung für $(G;K)$.

Bezeichnet K' wie in (1.12) die kompakte Untergruppe $\{(k,\chi(k)) : k \in K\}$ von $G \times \mathbb{T}$, so heißt eine Lévy-Abbildung für $(G\times\mathbb{T};K')$ mit der Abbildung Z verträglich (oder kurz verträglich), wenn sie die Menge

$D_Z(G\times\mathbb{T};K') := \{f \in D(G\times\mathbb{T};K') : f(g,z) = zf(g,1)$ für alle $g \in G$, $z \in \mathbb{T}\}$

in sich abbildet.

Eigenschaften:

(5.2) Für jede Lévy-Abbildung gilt $\Gamma\circ\Gamma=\Gamma$.

(5.3) Jede Konvexkombination von Lévy-Abbildungen ist wieder eine Lévy-Abbildung.

Wenn Γ ein Lévy-Abbildung für $(G;K)$ ist, so sind auch

$\bar{\Gamma} : f \to \overline{\Gamma(\bar{f})}$ und $\mathrm{Re}\,\Gamma := \frac{1}{2}(\Gamma+\bar{\Gamma})$ Lévy-Abbildungen für $(G;K)$.

[[Es ist nur (LA1) für $\bar{\Gamma}$ zu zeigen. Seien $f\in D(G;K)$ und $T\in P(G;K)$. Dann ist auch $\bar{T}\in P(G;K)$ und es gilt

$T(\bar{\Gamma}(f)) = T(\overline{\Gamma(\bar{f})}) = \overline{\bar{T}(\Gamma(\bar{f}))} = \overline{\bar{T}(\bar{f})} = T(f)$.]]

(5.4) Jede Lévy-Abbildung Γ ist stetig.

[[Sei G_o eine offene Lie-projektive Untergruppe von G, die K enthält. Da f wegen (LA2) nur von $f|G_o$ abhängt, kann man sich auf Lie-projektive Gruppen G beschränken. Nach Definition der Topologie des induktiven Limes auf $D(G)$ kann man sogar annehmen, daß G eine Lie-Gruppe ist. Dann gibt es aber wegen

(2.16) $T_j \in P_{\mathbb{C}}(G;\chi)$ und $f_j \in D(G;\chi)$ $(j\in n)$ sodaß

$f = \sum_{j\in n} T_j(f)f_j$ für alle $f\in D(G;\chi)$.

Wegen der Stetigkeit der T_j folgt die Behauptung.]]

(5.5) Sei $\phi \in D(G;\chi)$ mit $1 = \phi(1) \cdot ||\phi||_\infty$. Für $\psi := \Gamma(\phi)$ und $\Gamma_o(f) := \Gamma(f-f(1)\psi)$ (für $f\in D(G;\chi)$) gilt dann

$\Gamma(f) = f(1)\psi + \Gamma_o(f)$ für alle $f\in D(G;\chi)$.

Gelte nun $\chi=1_K$ und sei ϕ reell. Dann erfüllt Γ_o die Bedingung (LA2), aber (LA1) nur für alle $T\in P_{\mathbb{R}}(G;K)$. Das selbe gilt auch für $\Gamma_o' : f \to \frac{1}{2}(\Gamma_o f - \widetilde{\Gamma_o f})$. Γ_o' erfüllt zusätzlich

$\widetilde{\Gamma'_o f} = -\Gamma'_o f$ für alle $f \in D(G;K)$

und ist deshalb eine Lévy-Abbildung im Sinn von [24].

Schließlich ist durch

$\Gamma' : f \to \frac{1}{2} f(1)(\psi+\tilde{\psi}) + \Gamma'_o(f-f(1)\psi)$

eine Lévy-Abbildung für $(G;K)$ definiert mit

$\widetilde{\Gamma'(f)} = \Gamma'(f)$ für alle $f \in D(G;K)$ mit $f=\tilde{f}$ und

$\widetilde{\Gamma'(f)} = -\Gamma'(f)$ für alle $f \in D(G;K)$ mit $f(1)=0$.

(5.6) Sei Γ' eine mit der Abbildung Z verträgliche Lévy-Abbildung für $(G\times\mathbb{T};K')$. Dann wird durch

$\Gamma(f)(g) := \Gamma'(Zf)(g,1)$ für alle $f \in D(G;\chi)$

eine Lévy-Abbildung Γ für $(G;\chi)$ definiert mit

$Z(\Gamma(f)) = \Gamma'(Zf)$ für alle $f \in D(G;\chi)$.

Beweis: Die letzte Behauptung folgt aus der Verträglichkeit. Zum Nachweis von (LA1) betrachten wir $T \in P(G;\chi)$. Nach (2.14) existiert eine Distribution $T' \in P_{\mathbb{R}}(G\times\mathbb{T};K')$ mit $T = ZT'$, und es gilt für alle $f \in D(G;\chi)$

$T(\Gamma(f)) = T'(Z(\Gamma f)) = T'(\Gamma'(Zf)) = T'(Zf) = T(f)$.

Die Bedingung (LA2) folgt aus

$\Gamma(\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K)(g) = \Gamma'(Z(\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K))(g,1) = \Gamma'(\omega_K * Zf * \omega_{K'})(g,1)$

für alle $f \in D(G)$ und $g \in G$. □

Nun sind die wichtigsten Eigenschaften von Lévy-Abbildungen formuliert; es fehlt aber noch der Beweis für deren Existenz. Dieser benutzt die Lösung von Hilberts fünftem Problem. Der entscheidende Schritt ist dabei die Konstruktion einer Lévy-Abbildung für eine Lie-projektive Gruppe.

(5.7) Bezeichnungen: Von jetzt bis zum Hilfssatz (5.12) sei G Lie-projektiv. Wir setzen

$F := \{L \subset G : L$ kompakter Normalteiler, G/L Lie-Gruppe$\}$

$F_o := \{N \subset G : N$ kompakter Normalteiler, $N \cap K \subset \operatorname{Ker} \chi\}$ und

$F_1 := F \cap F_o$.

(5.8) Hilfssatz: Es gilt $F_1 \neq \emptyset$, $\bigcap F_1 = \{1\}$

und aus $M,N \in F_1$ folgt $M \cap N \in F_1$.

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß für jedes $L_o \in F$ und $\beta \in \chi(L_o \cap K) \setminus \{1\}$ ein $L_1 \in F$ mit $L_1 \subset L_o$ und $\beta \notin \chi(L_1 \cap K)$ existiert:

Sei $k \in L_o \cap K$ mit $\chi(k) = \beta$. Da $k \cdot (L_o \cap \operatorname{Ker} \chi) \not\ni 1$ kompakt ist, folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft und

$$\bigcap_{L \in F} k \cdot (L_o \cap \operatorname{Ker} \chi) \cap L = \emptyset,$$

daß ein $L \in F$ existiert mit

$k \cdot (L_o \cap \operatorname{Ker} \chi) \cap L = \emptyset$. Für $L_1 := L_o \cap L \in F$ gilt dann $\beta \notin \chi(L_1 \cap K)$.

Zum Beweis der ersten Behauptung beginnen wir mit einem beliebigen $L_o \in F$. Der obige Schluß ergibt ein $L_1 \in F$ mit $L_1 \subset L_o$ und $-1 \notin \chi(L_1 \cap K)$. Die kompakte Untergruppe $\chi(L_1 \cap K)$ von $\mathbb{T}$ ist somit endlich und wir können in endlich vielen analogen Schritten ein $L_2 \in F$ finden mit $L_2 \subset L_1$ und $\chi(L_2 \cap K) = \{1\}$, d.h. $L_2 \in F_1$. Da der Durchschnitt einer Menge aus F_1 mit einer aus F stets wieder in F_1 liegt und $\bigcap F = \{1\}$, gelten die beiden anderen Behauptungen. □

(5.9) Bezeichnungen: Für jedes $N \in F_o$ setzen wir

$D^N(G \times \mathbb{T}; K') := \{f \in D(G \times \mathbb{T}; K') : Tf = 0$ für alle $T \in P((N \times \{1\})K'; K')\}$.

Weiter setzen wir $P_{\mathbb{C}}(G \times \mathbb{T}; K')/P_{\mathbb{C}}((N \times \{1\})K'; K')$ und $D^N(G \times \mathbb{T}; K')$ in Dualität durch

$\langle T + P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K') \mid f \rangle := T(f)$

für alle $(T + P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K')) \in P_{\mathbb{C}}(G\times\mathbb{T};K')/P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K')$

und $f \in D^N(G\times\mathbb{T};K')$.

(5.10) Bezeichnungen: Sei $N \in F_o$. Wie in (2.16) setzen wir

$\chi_N : \pi_N(K) \to \mathbb{T}$, $\chi_N(kN) := \chi(k)$ sowie

$K'_N := \{(x, \chi_N(x)) : x \in \pi_N(K)\} = \pi_{N\times\{1\}}(K')$.

Wegen (2.16) c) gilt für die Abbildung

$\pi_{N\times\{1\}}: P_{\mathbb{C}}(G\times\mathbb{T};K') \to P_{\mathbb{C}}(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$

$\operatorname{Ker} \pi_{N\times\{1\}} \subset P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K')$,

und somit existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$\Phi_G : P_{\mathbb{C}}(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N) \to P_{\mathbb{C}}(G\times\mathbb{T};K')/P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K')$

mit

$\Phi_G \circ \pi_{N\times\{1\}} = \pi_{P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K')}$.

In den folgenden Hilfssätzen sei eine verträgliche Lévy-Abbildung Γ für $(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$ gegeben.

Für jedes $x \in \frac{G}{N}\times\mathbb{T}$ sei $T_x \in P_{\mathbb{C}}(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$ die durch

$T_x(f) := \Gamma(\omega_{K'_N} * f_* \omega_{K'_N})(x)$ definierte Distribution auf $\frac{G}{N}\times\mathbb{T}$.

(5.11) Hilfssatz: Sei $f \in D^N(G\times\mathbb{T};K')$. Dann ist die Funktion

$F : G\times\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ $\quad (g,z) \to \langle \Phi_G(T_{(gN,z)}) \mid f \rangle$

ein Element von $D(G\times\mathbb{T};K')$ und erfüllt

$T(F) = T(f)$ für alle $T \in P(G\times\mathbb{T};K')$

Gilt zusätzlich $f \in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$, so ist auch

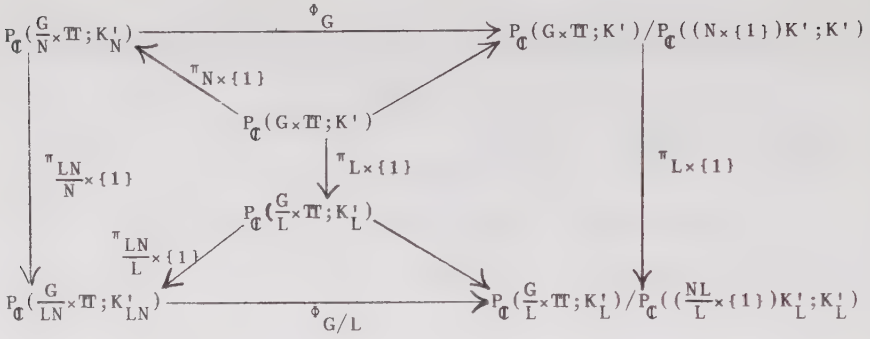
$F \in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$.

Beweis: Nach (5.8) existiert ein $L \in F_I$ mit $LN \in F_I$ (das heißt $\pi_N(K) \cap \pi_N(L) \subset \operatorname{Ker} \chi_N$) derart, daß es ein $\bar{f} \in D^{\pi_L(N)}(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L)$

gibt mit

$f = \bar{f} \circ \pi_{L\times\{1\}}$.

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm



Hieraus sieht man, daß für alle $(g,z) \in G\times\mathbb{T}$

$F(g,z) = \langle \Phi_{G/L}(\pi_{\frac{LN}{L}\times\{1\}}(T_{(gN,z)})) | \bar{f} \rangle$ gilt.

Sei $(T_j : j\in n)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $P_{\mathbb{C}}(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_j(gN,z) \in \mathbb{C}$, sodaß

$\pi_{\frac{LN}{N}\times\{1\}}(T_{(gN,z)}) = \sum_{j\in n} \alpha_j(gN,z)\, T_j$ für alle $(g,z) \in G\times\mathbb{T}$.

Da Funktionen $f_j \in D(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})$ $(j\in n)$ existieren mit

$T_j(f_l) = \delta_{jl}$ für alle $j,l \in n$, gilt

$\alpha_j = \Gamma(f_j \circ \pi_{\frac{LN}{N}\times\{1\}}) \in D(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$ für alle $j\in n$.

Daraus folgt aber

$F = \sum_{j\in n} \langle \Phi_{G/L}(T_j) | \bar{f} \rangle \cdot \alpha_j \circ \pi_{N\times\{1\}} \in D(G\times\mathbb{T};K')$.

Nun sei $T \in P(G\times\mathbb{T};K')$ und

$\pi_{LN\times\{1\}}(T) = \sum_{j\in n} \beta_j T_j$ (mit $\beta_j \in \mathbb{C}$ für alle $j\in n$). Wegen

$$T(\alpha_j \circ \pi_{N\times\{1\}}) = \pi_{N\times\{1\}}(T)(\Gamma(f_j \circ \pi_{\frac{LN}{N}\times\{1\}}))$$

$$= \pi_{N\times\{1\}}(T)(f_j \circ \pi_{\frac{LN}{N}\times\{1\}})$$

$$= \pi_{LN\times\{1\}}(T)(f_j)$$

$$= \beta_j$$

haben wir

$$T(F) = \sum_{j\in n} \langle \Phi_{G/L}(T_j) | \bar{f} \rangle \cdot T(\alpha_j \circ \pi_{N\times\{1\}})$$

$$= \langle \Phi_{G/L}(\sum_{j\in n} \beta_j T_j) | \bar{f} \rangle$$

$$= \langle \Phi_{G/L}(\pi_{LN\times\{1\}}(T)) | \bar{f} \rangle$$

$$= \langle \pi_{L\times\{1\}}(\Phi_G(\pi_{N\times\{1\}}(T))) | \bar{f} \rangle$$

$$= \langle \Phi_G(\pi_{N\times\{1\}}(T)) | f \rangle$$

$$= T(f) \quad .$$

Nun wird noch die letzte Behauptung bewiesen. Sei dazu $f \in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$. Die Dimension von $\{(T_j f' : j\in n) : f' \in D_Z(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})\}$ ist $n-1$; dies folgt aus

$\{(T_j f' : j\in n) : f' \in D_Z(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})\} = \{(ZT_j f'' : j\in n) : f'' \in D(\frac{G}{LN};\chi_{LN})\}$,

aus (2.14) und der Tatsache, daß (wegen $\dim_{\mathbb{R}}(P(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})) = n$) die Dimension von $P_{\mathbb{R}}(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})$ $n-1$ ist.

Man kann also die T_j und f_j so modifizieren, daß

$f_j \in D_Z(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})$ für alle $j \in n-1$. Es folgt

$T_{n-1}(f') = 0$ für alle $f' \in D_Z(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T};K'_{LN})$.

T_{n-1} ist somit ein Vielfaches der Distribution

$f' \to \frac{d}{dt}(f' * \omega_{K'_{LN}})(1,e^{it})|_{t=0} - i\omega_{K'_{LN}}(f')$ $\qquad (f' \in D(\frac{G}{LN}\times\mathbb{T}))$.

Also enthält auch die Klasse $\Phi_{G/L}(T_{n-1})$ ein Element dieser Gestalt, und folglich ist

$\langle \Phi_{G/L}(T_{n-1}) \mid \bar{f} \rangle = 0$.

Aus $f_j \circ \pi_{\frac{LN}{N}\times\{1\}} \in D_Z(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$ für $j \in n-1$ folgt

$\alpha_j = \Gamma(f_j \circ \pi_{\frac{LN}{N}\times\{1\}}) \in D_Z(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)^\wedge$ für $j \in n-1$ wegen der Verträglichkeit und damit

$$F = \sum_{j\in n-1} \langle \Phi_{G/L}(T_j) \mid \bar{f}\rangle \cdot \alpha_j \circ \pi_{N\times\{1\}} \in D_Z(G\times\mathbb{T};K'). \square$$

(5.12) Hilfssatz: Seien G Lie-projektiv, K eine kompakte Untergruppe von G, χ ein Charakter auf K und N eine Lie-Gruppe, die kompakter Normalteiler von G ist mit $N\cap K \subset \mathrm{Ker}\,\chi$. Wenn für $(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$ eine verträgliche Lévy-Abbildung Γ existiert, dann existiert für $(G\times\mathbb{T};K')$ eine verträgliche Lévy-Abbildung Γ' mit

$$\Gamma' \circ \pi_{N\times\{1\}} = \pi_{N\times\{1\}} \circ \Gamma .$$

Beweis: $(T_l : l\in m)$ sei eine Basis von $P_{\mathbb{R}}((N\times\{1\})K';K')$ (vgl. (2.16) d)) und $T_m := i\omega_{K'} \in P((N\times\{1\})K';K')$. Wegen $N\cap K \subset \mathrm{Ker}\,\chi$ existiert eine Funktion $\phi \in D(\frac{G}{N};\chi_N)$ mit $\phi(1N) = -i$. Wir setzen $\bar{f}_m := \Gamma(Z\phi) \in D_Z(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$ und $f_m := \bar{f}_m \circ \pi_{N\times\{1\}} \in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$. Wegen

(+) $T(f) = 0$ für alle $T\in P_{\mathbb{R}}((N\times\{1\})K';K')$ und $f\in D(G\times\mathbb{T};(N\times\{1\})K')$

gilt $T_l(f_m) = 0$ für alle $l\in m$ und aus $f_m(1,1) = -i$ folgt $T_m(f_m) = 1$. Wegen (2.14) und $D_Z(G\times\mathbb{T};K') = \{Zf : f\in D(G;\chi)\}$ gibt es für jedes $T\in P_{\mathbb{R}}((N\times\{1\})K';K')\setminus\{0\}$ ein $f\in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$ mit $T(f) \neq 0$.
Deshalb existieren Funktionen $f_l \in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$ $(l\in m)$ mit

$T_j(f_l) = \delta_{jl}$ für $j,l\in m$.

Indem man anstelle von f_l die Funktion $f_l - T_m(f_l)f_m$ benutzt, erreicht man

$T_j(f_l) = \delta_{jl}$ für $j,l\in m+1$.

Wir setzen nun

$\Gamma''(f) := \sum_{j\in m+1} T_j(f)\cdot f_j$ für alle $f\in D(G\times\mathbb{T};K')$.

Γ'' ist eine lineare Abbildung von $D(G\times\mathbb{T};K')$ in $D_Z(G\times\mathbb{T};K')$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $T(\Gamma''(f)) = T(f)$ für alle $T\in P((N\times\{1\})K';K')$, $f\in D(G\times\mathbb{T};K')$.

[Wenn $T = \sum_{l\in m+1} \beta_l T_l$ mit $\beta_l\in\mathbb{R}$, so gilt

$T(\Gamma''(f)) = \sum_{l,j\in m+1} \beta_l T_j(f) T_l(f_j) = \sum_{l\in m+1} \beta_l T_l(f) = T(f)$.]

(2) Für alle $(g,z)\in G\times\mathbb{T}$ gehört die Abbildung

$(f \mapsto \Gamma''(\omega_{K'}*f*\omega_{K'})(g,z))$ zu $P_{\mathbb{C}}((N\times\{1\})K';K')$.

[Diese Abbildung ist nämlich gerade $\sum_{j\in m+1} f_j(g,z)\cdot T_j$.]

Nach (1) gilt also $f-\Gamma''f \in D^N(G\times\mathbb{T};K')$ für alle $f\in D(G\times\mathbb{T};K')$.

Mit den Bezeichnungen von (5.9) und (5.10) setzen wir nun

$\Gamma'(f)(g,z) := \langle \Phi_G(T_{(gN,z)}) \mid f-\Gamma''f \rangle + \Gamma''f(g,z)$

für alle $g\in G$, $z\in\mathbb{T}$ und $f\in D(G\times\mathbb{T};K')$.

Nach (5.11) ist Γ' eine lineare Abbildung von $D(G\times\mathbb{T};K')$ in sich.

Weiter folgt aus $f\in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$ $f-\Gamma''f \in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$ und damit auch $\Gamma'(f)\in D_Z(G\times\mathbb{T};K')$. Γ' ist also verträglich.

Nun werden die beiden Bedingungen aus der Definition der Lévy-Abbildung nachgeprüft:

(LA1) Seien $T\in P(G\times\mathbb{T};K')$, $f\in D(G\times\mathbb{T};K')$ und F wie in (5.11) definiert, wobei man von $f-\Gamma''f$ anstelle von f ausgeht.

Dann gilt

$T(\Gamma'f) = T(F) + T(\Gamma''f) = T(f-\Gamma''f) + T(\Gamma''f) = T(f)$.

(LA2) Seien $(g,z) \in G\times\mathbb{T}$ und $T \in P_{\mathbb{C}}(G\times\mathbb{T};K')$ ein Element der Klasse $\Phi_G(T_{(gN,z)})$. Wegen

$\Gamma'(f)(g,z) = T(f-\Gamma''f) + \Gamma''f(g,z)$ und (2) ist nur noch

$(f \mapsto T(\Gamma''(\omega_{K'}*f*\omega_{K'}))) \in P_{\mathbb{C}}(G\times\mathbb{T};K')$ zu zeigen.

Dies folgt aber aus der Zerlegung von T und Γ'' in die Summe eines primitiven und das i-fache eines primitiven Teils (vgl. den Beweis von (6.1) b)).

Zum Beweis für die letzte Behauptung betrachten wir eine Funktion $\bar{f} \in D(\frac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)$. Für $f := \bar{f}\circ\pi_{N\times\{1\}} \in D(G\times\mathbb{T};(N\times\{1\})K')$ gilt dann wegen (†):

$$\Gamma''(f) - \sum_{j\in m+1} T_j(f)f_j - T_m(f)f_m.$$

Damit haben wir für alle $(g,z) \in G\times\mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
\Gamma'(\bar{f}\circ\pi_{N\times\{1\}})(g,z) &= \langle \Phi_G(T_{(gN,z)}) \mid (\bar{f} - T_m(f)\bar{f}_m)\circ\pi_{N\times\{1\}} \rangle + T_m(f)f_m(g,z) \\
&= \langle \pi_{N\times\{1\}}(\Phi_G(T_{(gN,z)})) \mid \bar{f} - T_m(f)\bar{f}_m \rangle + T_m(f)f_m(g,z) \\
&= \Gamma(\bar{f})(gN,z) - T_m(f)\Gamma(\bar{f}_m)(gN,z) + T_m(f)\bar{f}_m(gN,z) \\
&= \Gamma(\bar{f})\circ\pi_{N\times\{1\}}(g,z) \\
&= (\pi_{N\times\{1\}}\circ\Gamma)(\bar{f})(g,z) .
\end{aligned}$$

Bei der vorletzten Umformung wird benutzt, daß nach Wahl von $\bar{f}_m$ und wegen (5.2) $\Gamma(\bar{f}_m) = \bar{f}_m$ gilt. □

(5.13) Satz: Seien G eine lokalkompakte Gruppe, K eine kompakte Untergruppe und χ ein Charakter auf K.

Dann existiert eine mit der Abbildung Z verträgliche Lévy-Abbildung für $(G\times\mathbb{T};K')$.

Beweis: (I) Zunächst nehmen wir an, daß G Lie-projektiv ist. Es gelten die Bezeichnungen (5.7), (5.9) und (5.10).

Die Menge

$$\mathcal{M} := \{(N,\Gamma_N) : N \in F_o,\ \Gamma_N \text{ verträgliche Lévy-Abb. für } (\tfrac{G}{N}\times\mathbb{T};K'_N)\}$$

ist geordnet durch

$$(M,\Gamma_M) < (N,\Gamma_N) \quad :<=> \quad N \subset M \text{ und } \pi_{\frac{M}{N}\times\{1\}} \circ \Gamma_M = \Gamma_N \circ \pi_{\frac{M}{N}\times\{1\}}.$$

Auf die gleiche Weise wie (1) und (2) in (5.12) beweist man für jedes $L \in F_1$ die Existenz einer verträglichen Lévy-Abbildung Γ_L für $(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L)$. $\mathcal{M}$ ist also nicht leer.

Außerdem ist $\mathcal{M}$ induktiv geordnet:

Sei etwa J eine totalgeordnete Menge, $(L_j,\Gamma_j) \in \mathcal{M}$ für alle $j\in J$ und $(L_j,\Gamma_j) < (L_1,\Gamma_1)$ wenn $j<1$, dann setzen wir $L := \bigcap_{j\in J} L_j$.

Für jedes $f \in D(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L) = \bigcup_{j\in J}\{\bar{f}\circ\pi_{\frac{L_j}{L}\times\{1\}} : \bar{f}\in D(\frac{G}{L_j}\times\mathbb{T};K'_{L_j})\}$

- etwa von der Form $f = \bar{f}\circ\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}$ - setzen wir

$$\Gamma_L(f) := \Gamma_j(\bar{f})\circ\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}.$$

Γ_L ist eine (wohldefinierte) Abbildung von $D(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L)$ in sich, die $D_Z(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L)$ in sich abbildet, also verträglich ist.

Γ_L ist sogar eine Lévy-Abbildung, denn:

(LA1) Für alle $T \in P(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L)$ und $f = \bar{f}\circ\pi_{(L_j/L)\times\{1\}} \in D(\frac{G}{L}\times\mathbb{T};K'_L)$ gilt

$$T(\Gamma_L(f)) = T(\Gamma_j(\bar{f})\circ\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}) = \pi_{(L_j/L)\times\{1\}}(T)(\Gamma_j(\bar{f}))$$
$$- \pi_{(L_j/L)\times\{1\}}(T)(\bar{f}) - T(\bar{f}\circ\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}) - T(f).$$

(LA2) Sei $x \in \frac{G}{L}\times\mathbb{T}$ und für jedes $j\in J$ $T_j+iT'_j$ die nach (2.16) eindeutige Zerlegung von

$$(f \to \Gamma_j(\omega_{K'_{L_j}} * f * \omega_{K'_{L_j}})(\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}(x))) \in P_{\mathbb{C}}(\tfrac{G}{L_j}\times\mathbb{T};K'_{L_j}).$$

Für die Distributionen

$$T : f \to T_j(\bar{f}) \text{ und } T' : f \to T'_j(\bar{f}) \quad (\text{wobei } f = \bar{f}\circ\pi_{(L_j/L)\times\{1\}})$$

gilt damit

$(T+iT')(f) = \Gamma_L(\omega_{K_L'} * f * \omega_{K_L'})(x)$ für alle $f \in D(\frac{G}{L} \times \mathbb{T}; K_L')$ und

$\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}(T) = T_j$, $\pi_{(L_j/L)\times\{1\}}(T') = T_j'$ für alle $j \in J$,

also $T, T' \in P(\frac{G}{L} \times \mathbb{T}; K_L')$ und schließlich

$(f \to \Gamma_L(\omega_{K_L'} * f * \omega_{K_L'})(x)) = T+iT' \in P_{\mathbb{C}}(\frac{G}{L} \times \mathbb{T}; K_L')$.

Es ist sehr leicht zu sehen, daß für alle $j \in J$ $(L, \Gamma_L) > (L_j, \Gamma_j)$ gilt. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{M}$ also ein maximales Element (N, Γ_N).

Nun sei $L \in F$ beliebig. Wendet man Hilfssatz (5.12) auf $(\frac{G}{L \cap N}, \frac{N}{L \cap N}, \pi_{L \cap N}(K))$ anstatt (G, N, K) an, so erhält man eine verträgliche Lévy-Abbildung $\Gamma_{L \cap N}$ für $(\frac{G}{L \cap N} \times \mathbb{T}; \pi_{(L \cap N)\times\{1\}}(K))$ mit $\Gamma_{L \cap N} \circ \pi_{(N/L \cap N)\times\{1\}} = \pi_{(N/L \cap N)\times\{1\}} \circ \Gamma_N$, das heißt $(L \cap N, \Gamma_{L \cap N}) > (N, \Gamma_N)$.

Da (N, Γ_N) aber maximal war, folgt $L \supset N$ für alle $L \in F$, also $N \subset \bigcap_{L \in F} L = \{1\}$.

$\Gamma_{\{1\}}$ ist also die gesuchte verträgliche Lévy-Abbildung für $(G \times \mathbb{T}; K')$.

(II) Im Falle einer beliebigen lokalkompakten Gruppe G existiert nach (1.14) eine offene Lie-projektive Untergruppe G_o, die K enthält. Für $(G_o \times \mathbb{T}; K')$ existiert eine verträgliche Lévy-Abbildung Γ_o, und man muß nur

$$\Gamma(f)(g,z) := \begin{cases} \Gamma_o(f|(G_o \times \mathbb{T}))(g,z) & g \in G_o \\ 0 & g \notin G_o \end{cases}$$

setzen, um eine verträgliche Lévy-Abbildung Γ für $(G \times \mathbb{T}; K')$ zu erhalten. □

(5.14) Korollar: a) Für jede lokalkompakte Gruppe G und jeden Charakter χ auf einer kompakten Untergruppe von G existiert eine Lévy-Abbildung.

b) Für jede lokalkompakte Gruppe G und jede kompakte Untergruppe K von G existiert eine Lévy-Abbildung, die reell ist und folgende Eigenschaften hat:

$\widetilde{\Gamma(f)} = \Gamma(f)$, falls $f \in D(G;K)$ und $\tilde{f} = f$,

$\widetilde{\Gamma(f)} = -\Gamma(f)$, falls $f \in D(G;K)$ und $f(1) = 0$.

Beweis: a) folgt aus (5.13) und (5.6),

b) folgt aus a), (5.3) und (5.5). □

6. Die Lévy-Hinčin-Formel

Die Lévy-Hinčin-Formel, die in diesem Paragraphen bewiesen wird, kann dazu verwandt werden, den Satz von Roth (1.13) zu verschärfen (6.6). Damit steht dieser Satz nicht nur für primitive Distributionen (2.14) sondern auch für lokale Distributionen (6.8) zur Verfügung. Das letzte Resultat wird weiterverwendet, um sämtliche lokalen dissipativen Distributionen auf homogenen Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren (6.10). In (6.17) wird zuletzt noch eine Analogie zu (2.14) für lokale Distributionen bewiesen.

(6.1) Hilfssatz: a) Sei Γ eine Lévy-Abbildung für $(G;\chi)$ und η ein χ-Lévy-Maß. Dann gehört für jedes $f\in D(G)$ die Einschränkung von $\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K - \Gamma(\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K)$ auf $G\setminus K$ zu $L^1(\eta)$, und die Abbildung $A^\Gamma_\eta : D(G) \to \mathbb{C}$

$f \mapsto \int_{G\setminus K} (\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K - \Gamma(\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K))\, d\eta$

ist stetig, das heißt ein Element von $D'(G;\chi)$.

b) Sind Γ_0 und Γ_1 zwei Lévy-Abbildungen für $(G;\chi)$ und η ein χ-Lévy-Maß, so ist

$A^{\Gamma_0}_\eta - A^{\Gamma_1}_\eta \in P_{\mathbb{C}}(G;\chi)$.

Beweis: a) Die erste Behauptung folgt aus (LM2), da wegen (LA1) $\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K - \Gamma(\tilde{\chi}\omega_K * f * \tilde{\chi}\omega_K) \in N_\chi$ gilt.

Wegen der Bemerkung (5.5) genügt es, die Stetigkeit von $A^\Gamma_\eta : N_\chi \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f\, d\eta$ zu beweisen.

Sei zuerst G eine Lie-Gruppe und sei $\varepsilon>0$ so klein, daß

exp: $B_\varepsilon(0) \to U := \exp(B_\varepsilon(0)) \subset G$ ein Diffeomorphismus ist.

$W := \{f \in N_\chi : \|f\|_\infty \le 1$ und alle partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung von $f \circ \exp$ auf $B_\varepsilon(0)$ sind betraglich $\le 1\}$ ist also eine Nullumgebung in N_χ.

Sei nun $f \in W$. $f' : G/K \to \mathbb{R}$ sei die Abbildung $gK \to |f(g)|^2$. Man sieht leicht, daß alle partiellen Ableitungen 4. Ordnung von $f' \circ \exp$ auf $B_\varepsilon(0)$ vom Betrag ≤ 16 sind und daß (wegen $f \in N_\chi$) alle partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung im Nullpunkt verschwinden. Nach der Taylor-Formel gilt (mit einem $M \ge 0$)

$$|f'(x)| \le M \cdot \|\exp^{-1}(x)\|_2^4 \qquad \text{für alle } x \in \pi_K(U).$$

Da M nicht von der Wahl von $f \in W$ abhängt, sieht man ähnlich wie im Beweis von (3.7), daß $f_o \in M_K$ und $f_1 \in E_+^b(G;K)$ existieren mit

$$|f| \le f_o + f_1 \qquad \text{für alle } f \in W \text{ und } f_1 = 0 \text{ auf } U.$$

Die Bedingungen (LM2) und (LM3) implizieren

$$\left|\int f \, d\eta\right| \le \int |f| \, d|\eta| \le \int f_o \, d|\eta| + \int f_1 \, d|\eta| < \infty \qquad \text{für alle } f \in W.$$

Damit ist die Stetigkeit von A_η^Γ bewiesen, falls G eine Lie-Gruppe ist.

Für Lie-projektives G folgt die Behauptung daraus, daß die Topologie von N_χ eine induktive Topologie ist.

Für eine beliebige lokalkompakte Gruppe G sei G_o eine offene Lie-projektive Untergruppe, die K enthält (1.14). Dann ist $1_{G_o} \cdot \eta$ ein endliches Maß, also eine Distribution, $1_{G_o} \cdot \eta$ ist auf G_o konzentriert und liefert nach dem obigen auch einen stetigen Anteil.

b) Indem man $\phi \in D(G;\chi)$ mit $\phi(1) = 1 = \|\phi\|_\infty$ wählt und anstatt $A_\eta^\Gamma o - A_\eta^\Gamma 1$ die Abbildung

$f \to A_\eta^\Gamma o(\phi f) - A_\eta^\Gamma 1(\phi f)$ betrachtet, sieht man leicht, daß man oBdA $\chi = 1_K$ annehmen kann.

Nach (LA2), (2.15) und (5.5) gibt es reelle Abbildungen Γ'_j und Γ''_j von D(G;K) in sich, sodaß (mit $\psi_j := \Gamma_j(1_G)$)

$\Gamma_j(f) = f(1)\psi_j + \Gamma'_j(f) + i\Gamma''_j(f)$ für alle $f \in D(G;K)$

gilt (j=0,1). Setzt man noch $\eta' := \mathrm{Re}\,\eta$ und $\eta'' := \mathrm{Im}\,\eta$, so hat man wegen $\psi_1 - \psi_o \in N_K$ die Zerlegung

$$A^{\Gamma_o}_{\eta}(f) - A^{\Gamma_1}_{\eta}(f) = \int(\Gamma_1 f - \Gamma_o f)\,d\eta$$

$$= f(1)\cdot\int(\psi_1-\psi_o)\,d\eta + \int(\Gamma'_1 f - \Gamma'_o f + i\Gamma''_1 f - i\Gamma''_o f)\,d\eta$$

für alle $f \in D(G;K)$.

Der erste Summand auf der rechten Seite,

$f \to f(1)\cdot\int(\psi_1-\psi_o)\,d\eta$,

gehört zu $P_{\mathbb{C}}(G;K)$. Wegen

$T(\Gamma'_j f + i\Gamma''_j f) = T(f)$ für alle $T \in P_{\mathbb{R}}(G;K)$, $f \in D(G;K)$, j=0,1 und

$\Gamma'_j f = \frac{1}{2}(\Gamma'_j f + i\Gamma''_j f) + \frac{1}{2}\overline{(\Gamma'_j \check{f} + i\Gamma''_j \check{f})}$ gilt

$T(\Gamma'_j f) = T(f)$ und $T(\Gamma''_j f) = 0$ für $T \in P_{\mathbb{R}}(G;K)$, $f \in D(G;K)$, j=0,1.

Da weiterhin

$\Gamma'_j f(1) = \Gamma''_j f(1) = 0$ für alle $f \in D(G;K)$ und j=0,1 , gilt

$\Gamma'_1 f - \Gamma'_o f \in N_K$ und $\Gamma''_1 f - \Gamma''_o f \in N_K$ für alle $f \in D(G;K)$.

Da im Beweis von a) nur die Bedingungen (LM2) und (LM3) verwendet wurden und diese Bedingungen auch von η' und η'' erfüllt werden, sind die Abbildungen

$$T_o : f \to \int(\Gamma'_1(\omega_K * f * \omega_K) - \Gamma'_o(\omega_K * f * \omega_K))d\eta' - \int(\Gamma''_1(\omega_K * f * \omega_K) - \Gamma''_o(\omega_K * f * \omega_K))d\eta''$$

$$T_1 : f \to \int(\Gamma'_1(\omega_K * f * \omega_K) - \Gamma'_o(\omega_K * f * \omega_K))d\eta'' + \int(\Gamma''_1(\omega_K * f * \omega_K) - \Gamma''_o(\omega_K * f * \omega_K))d\eta'$$

Distributionen aus D'(G;K).

Für jedes $g \in G$ und j=0,1 gehören die Abbildungen

$f \to \Gamma'_j(\omega_K * f * \omega_K)(g)$ und $f \to \Gamma''_j(\omega_K * f * \omega_K)(g)$ zu $P_{\mathbb{R}}(G;K)$.

Also gilt für jedes $f \in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit $f(1) \geq f$ und $f(1) \geq 0$

$\Gamma_j' f = \Gamma_j'' f = 0 \qquad (j=0,1)$ und weiter

$T_o(f) = T_1(f) = 0.$

Dies beweist $T_o, T_1 \in P_{\mathbb{R}}(G;K)$ und

$$A_\eta^{\Gamma_o} - A_\eta^{\Gamma_1} = \int(\psi_1 - \psi_o)\, d\eta \cdot \omega_K + T_o + iT_1 \in P_{\mathbb{C}}(G;K). \quad \square$$

(6.2) Satz (Lévy-Hinčin-Formel):

Sei Γ eine Lévy-Abbildung für $(G;\chi)$.

a) Für jedes χ-Lévy-Maß η existiert genau eine χ-primitive Distribution $P_\eta^\Gamma \in D'(G;\chi)$, derart daß $L_\eta^\Gamma := A_\eta^\Gamma + iP_\eta^\Gamma$ χ-dissipativ und normiert ist. Dabei ist A_η^Γ wie in (6.1) definiert. Das Lévy-Maß von L_η^Γ ist η.

b) Sei T eine χ-dissipative Distribution auf G mit Lévy-Maß η. Dann existieren eindeutig bestimmte $a \geq 0$, $P \in P(G;\chi)$ und eine χ-quadratische Distribution Q, sodaß

$$T = a \cdot \chi\omega_K + P + Q + L_\eta^\Gamma .$$

Beweis: a) Existenz: (I) Seien zuerst $\chi = 1_K$, Γ reell und $\eta \geq 0$. Setzt man

$$P_\eta^\Gamma := [-i \cdot \int(\Gamma(1_G) - 1_G)\, d\eta] \cdot \omega_K ,$$

so ist die in a) definierte Distribution L_η^Γ reell, $L_\eta^\Gamma(1_G) = 0$ und für alle $f \in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit $f(1) \geq f$ und $f(1) \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} L_\eta^\Gamma(f) &= \int(f - f(1)\Gamma(1_G))\, d\eta + f(1) \cdot \int(\Gamma(1_G) - 1_G)\, d\eta \\ &= \int(f - f(1)1_G)\, d\eta \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

L_η^Γ ist also eine positiv normierte 1_K-dissipative Distribution.

(II) Für eine beliebige Lévy-Abbildung folgt die Behauptung aus (6.1) b).

(III) Nun seien χ und η beliebig; Γ' sei eine verträgliche Lévy-Abbildung für $(G\times\mathbb{T};K')$ und Γ die nach (5.6) konstruierte Lévy-Abbildung für $(G;\chi)$. Weiter sei η' ein positives $1_{K'}$-Lévy-Maß auf $(G\times\mathbb{T})\setminus K'$ mit $Z\eta' = \eta$ (vgl. (4.7)). Aus der $1_{K'}$-Dissipativität von $A^{\Gamma'}_{\eta'} + iP^{\Gamma'}_{\eta'}$ folgt nun (mit $P^{\Gamma}_{\eta} := ZP^{\Gamma'}_{\eta'}$) die χ-Dissipativität von $A^{\Gamma}_{\eta} + iP^{\Gamma}_{\eta} = Z(A^{\Gamma'}_{\eta'} + iP^{\Gamma'}_{\eta'})$.

(IV) Wenn zuletzt auch Γ beliebig ist, folgt die Behauptung wieder aus (6.1) b).

Eindeutigkeit: (I) Wir betrachten zuerst wieder den Spezialfall $\chi=1_K$ und nehmen an, daß Γ reell ist und $0 \le \Gamma(1_G) \le 1_G$ gilt. Dies ist möglich wegen (5.3) und (5.5).

Zu zeigen ist, daß höchstens eine Distribution $P\in P_{\mathbb{R}}(G;K)$ existiert, sodaß $T := A + iP + a\omega_K$ für ein $a\in\mathbb{R}$ 1_K-dissipativ ist. P ist durch die Werte $P(f)$ für $f\in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit $f(1)=0$ eindeutig bestimmt; es sei also $f\in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit $f(1)=0$ beliebig.

Für jedes $n\ge 1$ wählen wir eine Funktion $\psi_n\in D(G;K)$ mit $0\le\psi_n\le 1$, $\psi_n=1$ in einer Umgebung von K, $|f^2\psi_n| \le 1/2n^2$, $\int f^2\psi_n \, d|\mathrm{Re}\,\eta| \le 1/n^2$ und $\int|f\psi_n| \, d|\mathrm{Im}\,\eta| \le 1/n$. Die letzten beiden Ungleichungen sind möglich, da $f^2 \in M_K \subset L^1(\mathrm{Re}\,\eta)$ und nach (4.11) $|f| \in L^i(\mathrm{Im}\,\eta)$. Für die Funktionen

$$f^{\pm}_n := \Gamma(1_G) - n^2\psi_n f^2 \pm in\psi_n f \quad \in \quad D(G;K) \qquad (n\ge 1)$$

gilt nach Konstruktion

$$1 \quad \|f^{\vdash}_n\|_\infty \quad f^{\pm}_n(1)$$

und folglich

$$0 \ge \mathrm{Re}\, Tf^{\pm}_n$$

$$\int[\Gamma(1_G) - n^2\psi_n f^2 - \Gamma(1_G)]\,d\,\mathrm{Re}\,\eta \mp \int[n\psi_n f - n\Gamma(\psi_n f)]\,d\,\mathrm{Im}\,\eta + a\mp P(n\psi_n f)$$

$$= -n^2\int\psi_n f^2 \; d\;\mathrm{Re}\,\eta + a \mp (n\int(\psi_n f - \Gamma(f)) \; d\;\mathrm{Im}\,\eta + nP(f)).$$

Daraus folgt aber für alle $n \geq 1$

$$\left| \int \psi_n f \, d\,\mathrm{Im}\,\eta - \int \Gamma(f) \, d\,\mathrm{Im}\,\eta + P(f) \right| \leq -\frac{a}{n} + n \int \psi_n f^2 \, d\,\mathrm{Re}\,\eta \,.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus

$P(f) = \int \Gamma(f) \, d\,\mathrm{Im}\,\eta$ für alle $f \in D(G;K)$ mit $f(1) = 0$.

(II) Wieder mit Hilfe von (6.1) b) folgt im Falle $\chi = 1_K$, aber einer beliebigen Lévy-Abbildung Γ für $(G;K)$, daß eine Distribution $P \in P(G;K)$ durch die 1_K-Dissipativität von $A^{\Gamma}_{\eta} + iP$ bis auf einen Summanden der Form $ai\omega_K$ $(a \in \mathbb{R})$ eindeutig bestimmt ist.

(III) Sei nun zuletzt auch χ beliebig. Man wählt $\phi \in D(G;\chi)$ mit $\phi(1) = 1 = \|\phi\|_\infty$; dann ist die Abbildung

$\Gamma' : f \to \bar{\phi}\Gamma(\phi f)$ von $D(G;K)$ in sich

eine Lévy-Abbildung für $(G;K)$.

$P' : D(G) \to \mathbb{C}$, $f \to \int \Gamma(\phi \cdot (\omega_K * f * \omega_K)) \, d(1-\phi\bar{\phi})\eta$

ist nach (6.1) b) ein Element von $P_{\mathbb{C}}(G;K)$.

Die Eindeutigkeit von P folgt aus dem vorigen und der Gleichung

$$\phi \cdot A^{\Gamma}_{\eta} = A^{\Gamma'}_{\phi\eta} - P' \,.$$

b) Eindeutigkeit: $-a$ ist die maximale reelle Zahl, für die $T - a\chi\omega_K$ χ-dissipativ ist. Damit ist die Summe von P und Q eindeutig bestimmt und deshalb wegen $P^* = -P$ und $Q^* = Q$ auch P und Q.

Existenz: (I) Zuerst sei $\chi = 1_K$ und Γ reell, sowie T positiv normiert, also $\eta \geq 0$.

$T' := T - L^{\Gamma}_{\eta}$ ist somit reell, positiv normiert und lokal.

[Wenn f in einer Umgebung von K verschwindet, ist $\Gamma(f) = 0$ und deshalb $L^{\Gamma}_{\eta}(f) = \int f \, d\eta = T(f)$.]

Für alle $f \in D_{\mathbb{R}}(G;K)$ mit $f(1) \geq f$ und $f(1) \geq 0$ gilt

$$T'(f) = T(f) - \int (f - \Gamma f)\, d\eta + f(1) \cdot \int (\Gamma(1_G) - 1_G)\, d\eta$$

$$- T(f) + \int (f(1)1_G - f)\, d\eta$$

$$\leq T(f) + T(f(1)1_G - f)$$

$$= 0$$

T' ist also ein verallgemeinerter K-Laplace-Operator auf G.

Nun setzt man $Q := \frac{1}{2}(T' + T'^*)$ und $P := \frac{1}{2}(T' - T'^*)$. Q ist 1_K-dissipativ, normiert, reell, lokal und erfüllt $Q^* = Q$; Q ist also echt K-quadratisch.

Um zu zeigen, daß P ein verallgemeinerter K-Laplace-Operator ist, genügt es, für jedes $f \in D(G;K)$ mit $f(1) \geq f$ und $f(1) \geq 0$

$$P(f) = \frac{1}{2} T'(f - \tilde{f}) \leq 0$$

zu zeigen. Ähnlich wie in (3.7) sieht man, daß eine Funktion $\psi \in M_K$ existiert, sodaß für jedes $\varepsilon > 0$

$\varepsilon \cdot \psi \geq f - \tilde{f}$ in einer Umgebung von K gilt.

Da T' ein lokaler verallgemeinerter K-Laplace-Operator ist, folgt

$\varepsilon T(\psi) \geq T'(f - \tilde{f}) = 2P(f)$ für alle $\varepsilon > 0$, das heißt

$P(f) \leq 0$.

Wegen $P^* = -P$ sowie (2.13) ist P echt K-primitiv. Nach Konstruktion gilt

$$T = P + Q + L_\eta^\Gamma .$$

(II) Auf die im Beweisschritt 1 gemachte Voraussetzung, daß Γ reell ist, kann wegen der folgenden Bemerkung (6.3) verzichtet werden.

(III) Nun seien χ und T beliebig und Γ' eine verträgliche Lévy-Abbildung für $(G \times \mathbb{T}; K')$. Γ sei die in (5.6) konstruierte Lévy-Abbildung für $(G;\chi)$ mit $Z\Gamma = \Gamma' Z$ und T' sei ein normierter

verallgemeinerter K'-Laplace-Operator auf $G\times\mathbb{T}$ mit $T = ZT'$. Für das Lévy-Maß η' von T' gilt nach (4.14) $\eta = Z\eta'$. Es existieren also echt K'-primitive bzw. echt K'-quadratische Distributionen P' bzw. Q' auf $G\times\mathbb{T}$ mit

$$T' = P' + Q' + (A_{\eta'}^{\Gamma'} + iP_{\eta'}^{\Gamma'}) .$$

Daraus folgt

$$T = ZT' = ZP' + ZQ' + (A_{\eta}^{\Gamma} + iZP_{\eta'}^{\Gamma'}).$$

$P := ZP'$ ist χ-primitiv, ZQ' ist lokal und erfüllt $(ZQ')^*=ZQ'$, und es gibt ein $a_o\geq 0$, derart daß $Q := ZQ' + a_o\chi\omega_K$ normiert und folglich χ-quadratisch ist. Wegen der in a) bewiesenen Eindeutigkeit von P_η^Γ existiert ein $a_1\geq 0$ mit

$$P_\eta^\Gamma = ZP_{\eta'}^{\Gamma'} - a_1 i\cdot\chi\omega_K .$$

Damit hat man

$$T = P + (Q - a_o\chi\omega_K) + (L_\eta^\Gamma - a_1\chi\omega_K)$$
$$= -(a_o+a_1)\cdot\chi\omega_K + P + Q + L_\eta^\Gamma .$$

(IV) Wenn zuletzt auch Γ beliebig ist, folgt die Behauptung wieder mit (6.3). □

(6.3) Bemerkung: Seien Γ und Γ' zwei Lévy-Abbildungen für $(G;\chi)$. Dann gilt für jedes χ-Lévy-Maß η

$$L_\eta^\Gamma - L_\eta^{\Gamma'} \in P(G;\chi).$$

In (6.2) b) hängen also a und Q von der Wahl von Γ nicht ab.

Beweis: Dies folgt aus (6.1) b) und der Eindeutigkeit in (6.2) a).

(6.4) Korollar: Falls T eine positiv normierte, 1_K-dissipative Distribution auf G ist und die Lévy-Abbildung Γ reell ist, gilt in der Zerlegung in (6.2) b):
$a=0$, $P \in P_{\mathbb{R}}(G;K)$, Q ist echt K-quadratisch und L_η^Γ ist positiv normiert.

(6.5) Korollar: Wenn η ein nichtnegatives 1_K-Lévy-Maß auf $G \setminus K$ ist, so gilt $\operatorname{Re} L_\eta^\Gamma(1_G) = 0$. Ist die Lévy-Abbildung reell, so ist L_η^Γ positiv normiert.

Beweis: Die zweite Behauptung folgt aus I im Existenzbeweis in (6.2) a). Daraus folgt die erste Behauptung mit Hilfe von (6.3). □

Für die folgende Verschärfung eines Satzes von Roth ([22], Corollaire II.2.4. , vgl. auch (1.13)) benötigen wir wieder die Bezeichnungen aus (1.12) und (4.6).

(6.6) Satz: Sei T eine χ-dissipative Distribution auf G. Dann existiert eine positiv normierte $1_{K'}$-dissipative Distribution T' auf $G \times \mathbb{T}$ mit
$T = ZT'$ und $\operatorname{supp}(T') \subset \operatorname{supp}(T) \times \mathbb{T}$.

Beweis: Der triviale Fall $T=0$ sei ausgeschlossen. Man sieht leicht, daß $M := \operatorname{supp}(T)$ die kompakte Untergruppe K enthält. Wegen (1.13) existiert eine positiv normierte, $1_{K'}$-dissipative Distribution T" auf $G \times \mathbb{T}$ mit $T = ZT"$. Seien η bzw. $\eta"$ die Lévy-Maße von T bzw. T". Nach (4.5) sind $\eta' := 1_{M \times \mathbb{T}} \eta"$ und $\eta''' := 1_{\complement(M \times \mathbb{T})} \eta"$ $1_{K'}$-Lévy-Maße und es gilt $Z\eta' = \eta$ und $Z\eta''' = 0$ wegen (4.14).
Sei Γ' eine verträgliche Lévy-Abbildung für $(G \times \mathbb{T}; K')$ und Γ die in (5.6) definierte Lévy-Abbildung für $(G;\chi)$. Mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi zeigt man, daß (mit den Bezeichnungen von (6.1))

$ZA^{\dot{\Gamma}'}_{\eta'''} = A^{\Gamma}_{Z\eta'''} = 0.$

Wegen (6.2) a) existiert $a \geq 0$ mit

$ZL^{\Gamma'}_{\eta'''} = -a\chi\omega_K.$

Aus $\eta'' = \eta' + \eta'''$ folgt $A^{\Gamma'}_{\eta''} = A^{\Gamma'}_{\eta'} + A^{\Gamma'}_{\eta'''}$

und daraus mit (6.2) a)

$L^{\Gamma'}_{\eta''} = L^{\Gamma'}_{\eta'} + L^{\Gamma'}_{\eta'''} + a'\omega_{K'}$ für ein $a' \geq 0$.

Wegen (6.5) gilt $a' = 0$ und deshalb

$L^{\Gamma'}_{\eta''} = L^{\Gamma'}_{\eta'} + L^{\Gamma'}_{\eta'''}$.

Nach (6.2) b) existiert eine lokale, positiv normierte $1_{K'}$-dissipative Distribution L auf $G\times\mathbb{T}$, sodaß

$T'' = L + L^{\Gamma'}_{\eta''}$.

Damit hat man

$T - ZT'' = Z(L + L^{\Gamma'}_{\eta'}) + ZL^{\Gamma'}_{\eta'''} = Z(L + L^{\Gamma'}_{\eta'}) - a\chi\omega_K.$

Sei nun Q die echt K'-quadratische Distribution

$f \to a \frac{d^2}{dt^2}(\omega_{K'} * f * \omega_{K'})(1,e^{it})|_{t=0}$ auf $G\times\mathbb{T}$.

Es gilt

$ZQ = -a\chi\omega_K$ und damit für $T' := Q + L + L^{\Gamma'}_{\eta'}$

$T = ZT'$.

Der Träger von T' ist in $M\times\mathbb{T}$ enthalten, denn

$\mathrm{supp}(Q+L) \subset K' \subset M\times\mathbb{T}$ und

$\mathrm{supp}(L^{\Gamma'}_{\eta'}) \subset M\times\mathbb{T}$ wegen $\eta' = 1_{M\times\mathbb{T}}\cdot\eta'$. □

(6.7) Bemerkung: Die Distribution T' im vorigen Satz ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Seien etwa $G := \mathbb{R}$, $K := \{0\}$, $T := \varepsilon_1 - 2\varepsilon_0$ und Q die Distribution $f \to \frac{d^2}{dt^2} f(1,e^{it})|_{t=0}$ auf $G\times\mathbb{T}$. Für die positiv normierten 1_K-dissipativen Distributionen

$T'_0 := \varepsilon_{(1,1)} - \varepsilon_{(0,1)} + Q$ und

$T'_1 := \varepsilon_{(1,\exp(i\pi/3))} + \varepsilon_{(1,\exp(-i\pi/3))} - 2\varepsilon_{(0,1)}$

gilt $ZT'_0 = ZT'_1 = T$ und $\mathrm{supp}(T'_0) \subset \{0,1\}\times\mathbb{T}$, $\mathrm{supp}(T'_1) \subset \{0,1\}\times\mathbb{T}$.

(6.8) Korollar: Für jede lokale, χ-dissipative Distribution T auf G existiert eine lokale, positiv normierte, $1_{K'}$-dissipative Distribution T' auf $G\times\mathbb{T}$ mit $T = ZT'$.

Beweis: Nach (1.13) existiert eine positiv normierte, $1_{K'}$-dissipative Distribution T" auf $G\times\mathbb{T}$ mit $ZT"=T$. Das Lévy-Maß η von T" erfüllt $Z\eta = 0$. Ist Γ' eine verträgliche Lévy-Abbildung für $(G\times\mathbb{T};K')$, so gibt es (wie im Beweis von (6.6)) ein $a\geq 0$ mit

$ZL_\eta^{\Gamma'} = -a\chi\omega_K$.

Nach (6.2) b) existiert eine lokale, positiv normierte und $1_{K'}$-dissipative Distribution L auf $G\times\mathbb{T}$ mit

$T" = L + L_\eta^{\Gamma'}$.

Bezeichnet Q die im Beweis von (6.6) definierte Distribution, so gilt für die lokale, positiv normierte und $1_{K'}$-dissipative Distribution $T' := L + Q$ auf $G\times\mathbb{T}$

$T = ZT'$. □

Satz (6.8) zeigt, daß die Abbildung Z die Menge der positiv normierten, lokalen $1_{K'}$-dissipativen Distributionen auf $G\times\mathbb{T}$ surjektiv auf die Menge der lokalen χ-dissipativen Distributionen auf G abbildet. Es stellt sich deshalb die Frage, ob Z auf dieser Menge auch injektiv ist. Diese Frage wird zuerst für Lie-Gruppen geklärt; dann wird mit der üblichen Methode dieses

Ergebnis auf beliebige lokalkompakte Gruppen übertragen. Dazu ist der nächste Satz nützlich, der die Menge der lokalen χ-dissipativen Distributionen auf einer Lie-Gruppe charakterisiert. Außerdem wird er als wichtiges Hilfsmittel im letzten Paragraphen verwandt.

(6.9) Bezeichnungen: Von jetzt ab bis (6.16) sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra Lie(G). Diese kann mit der Menge der echt {1}-primitiven Distributionen auf G identifiziert werden (vgl. (2.12)). Im übrigen werden die Bezeichnungen von [12] übernommen. exp : Lie(G) $\to$ G sei also die Exponentialabbildung und für jedes $g \in G$ bezeichne Ad(g) das Differential der Abbildung $x \to gxg^{-1}$ von G in sich, das heißt, für jedes $g \in G$ und jedes $X \in \mathrm{Lie}(G)$ ist Ad(g)X das durch

$$\exp(t \cdot \mathrm{Ad}(g)X) = g \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

eindeutig bestimmte Element von Lie(G).

Nach [12], S. 389 existiert ein Untervektorraum M von Lie(G) mit

$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(K) \oplus M$ (als direkte Summe von Vektorräumen)

und

$\mathrm{Ad}(k)\, M \subset M$ für alle $k \in K$.

$(X_j : j \in m)$ sei eine Basis von M.

(6.10) Satz: Für eine Distribution $T \in D'(G)$ auf G sind äquivalent:

(i) T ist χ-dissipativ und lokal,

(ii) $T = (a\varepsilon_1 + \sum_{j \in m} b_j X_j + \sum_{j,l \in m} c_{jl} X_j * X_l) * \chi\omega_K$

mit $a, b_j \in \mathbb{C}$, $c_{jl} \in \mathbb{R}$ $(j,l \in m)$, $\mathrm{Re}\, a \leq 0$,

$(c_{jl})_{j,l \in m}$ positiv semidefinit,

$(4 \,\mathrm{Re}\, a\, c_{jl} + \mathrm{Im}\, b_j \,\mathrm{Im}\, b_l)_{j,l \in m}$ negativ semidefinit

sowie

$$\sum_{j\in m} b_j \mathrm{Ad}(k)X_j = \sum_{j\in m} b_j X_j \qquad \text{für alle } k\in K,$$

$$\sum_{j\in m} c_{jl} \mathrm{Ad}(k)X_j * \mathrm{Ad}(k)X_l = \sum_{j\in m} c_{jl} X_j * X_l \qquad \text{für alle } k\in K.$$

Beweis: Wir betrachten folgende Elemente der Lie-Algebra von $G\times\mathbb{T}$:

$$X'_j : f \to \frac{d}{dt} f(\exp(tX_j),1)|_{t=0} \qquad \text{für alle } f\in D(G\times\mathbb{T}) \text{ und } j\in m,$$

$$Y' : f \to \frac{d}{dt} f(1,e^{it})|_{t=0} \qquad \text{für alle } f\in D(G\times\mathbb{T}).$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\mathrm{Lie}(G\times\mathbb{T}) = \mathrm{Lie}(K') \oplus \langle X'_j, Y' : j\in m\rangle$$

sowie

(1) $Z(\mathrm{Ad}(k,\chi(k))X') = \mathrm{Ad}(k)(ZX')$ für $X'\in \mathrm{Lie}(G\times\mathbb{T})$ und $k\in K$,

und

(2) $Z(X'_j * \omega_{K'}) = X_j * \chi\omega_K$ und $Z(Y' * \omega_{K'}) = i\chi\omega_K$ für $j\in m$.

((i)⇒(ii)): Nach (6.8) existiert eine positiv normierte, lokale und $1_{K'}$-dissipative Distribution T' auf $G\times\mathbb{T}$ mit $T = ZT'$.
Nach [15], Theorem 9.1 ist T' von der Form

$$T' = \Big(\sum_{j\in m} b'_j X'_j + b'Y' + \sum_{j,l\in m} c'_{jl} X'_j * X'_l + \sum_{j\in m} d'_j (X'_j * Y' + Y' * X'_j) + a'Y'^{*2}\Big) * \omega_{K'}.$$

mit $a', b', b'_j, c'_{jl}, d'_j \in \mathbb{R}$ für alle $j,l\in m$.
Dabei muß beachtet werden, daß in [15] der infinitesimale Erzeuger eine Distribution T" auf der (m+1)-dimensionalen Mannigfaltigkeit $(G\times\mathbb{T})/K'$ ist, die mit T' in der Beziehung $T" = \pi_{K'}(T')$ steht.
Sei α eine auf einer geeigneten Umgebung von $1K'$ definierte Karte von $(G\times\mathbb{T})/K'$. Für $j\in m+1$ bezeichne $X"_j$ das durch
$X"_j(F) := \frac{\partial}{\partial x_j} F\circ\alpha^{-1}$ (für $F\in C^\infty((G\times\mathbb{T})/K')$) definierte Element des Tangentialraums von $(G\times\mathbb{T})/K'$ in $1K'$. Wegen der Surjektivität von π_K gibt es zu jedem $j\in m+1$ ein Element X' von $\langle X'_j, Y' : j\in m\rangle$ mit $\pi_K(X') = X"_j$. Nach geeigneter Umparametrisierung kann man

$\pi_K(X'_j) = X''_j$ für $j \in m$ und $\pi_K(Y') = X''_m$ annehmen.

Für alle $f \in D(G \times \mathbb{T})$ mit $f_* \omega_{K'} = f$ existiert ein $F \in D((G \times \mathbb{T})/K')$ mit $f = F \circ \pi_{K'}$, und folglich

$$T'(f) = T''(F)$$

$$= \sum_{j \in m+1} b'_j \frac{\partial}{\partial x_j} F \circ \alpha^{-1} + \sum_{j,l \in m+1} c'_{jl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} F \circ \alpha^{-1}$$

$$- \sum_{j \in m} b'_j X'_j(f) + b'Y'(f) + \sum_{j,l \in m} c'_{jl} X'_j * X'_l(f) + \sum_{j \in m} d'_j (X'_j * Y' + Y' * X'_j)(f) + a' \cdot Y'^{*2}(f)$$

(mit $b' := b'_m$, $d'_j := c'_{jm}$ $(j \in m)$ und $a' := c'_{mm}$).

Für beliebiges $f \in D(G)$ hat man daher

$$T'(f) = T''(f_* \omega_{K'})$$

$$= \Big(\sum_{j \in m} b'_j X'_j + b'Y' + \sum_{j,l \in m} c'_{jl} X'_j * X'_l + \sum_{j \in m} d'_j (X'_j * Y' + Y' * X'_j) + a' Y'^{*2} \Big)(f_* \omega_{K'})$$

$$= \Big(\Big(\sum_{j \in m} b'_j X'_j + b'Y' + \sum_{j,l \in m} c'_{jl} X'_j * X'_l + \sum_{j \in m} d'_j (X'_j * Y' + Y' * X'_j) + a' Y'^{*2} \Big) * \omega_{K'} \Big)(f) .$$

Wegen $\omega_{K'} * T' = T'$ gilt

$$(3) \qquad \sum_{j \in m} b'_j \operatorname{Ad}(k') X'_j = \sum_{j \in m} b'_j X'_j \qquad \text{für alle } k' \in K',$$

$$(4) \qquad \sum_{j \in m} d'_j \operatorname{Ad}(k') X'_j = \sum_{j \in m} d'_j X'_j \qquad \text{für alle } k' \in K',$$

$$(5) \qquad \sum_{j,l \in m} c'_{jl} \operatorname{Ad}(k') X'_j * \operatorname{Ad}(k') X'_l = \sum_{j,l \in m} c'_{jl} X'_j * X'_l \qquad \text{für alle } k' \in K'.$$

Setzt man $a := ib' - a'$ und $b_j := b'_j + 2id'_j$ $(j \in m)$, so erhält man aus $T = ZT'$ und (2)

$$T = \Big(a\varepsilon_1 + \sum_{j \in m} b_j X_j + \sum_{j,l \in m} c_{jl} X_j * X_l \Big) * \chi \omega_K .$$

Aus (1),(3) und (4) bzw. (1) und (5) folgen

$$\sum_{j \in m} b_j \operatorname{Ad}(k) X_j = \sum_{j \in m} b_j X_j \qquad \text{für alle } k \in K, \text{ bzw.}$$

$$\sum_{j,l \in m} c_{jl} \operatorname{Ad}(k) X_j * \operatorname{Ad}(k) X_l = \sum_{j,l \in m} c_{jl} X_j * X_l \qquad \text{für alle } k \in K.$$

Bezeichnen wir mit C die mxm-Matrix $(c_{jl})_{j,l\in m}$ und mit C' die $(m+1)\times(m+1)$-Matrix $\begin{pmatrix} & & d'_0 \\ & C & \vdots \\ & & d'_{m-1} \\ d'_0 \dots & d'_{m-1} & a' \end{pmatrix}$, so ist nach dem zitierten Satz in [15] C' positiv semidefinit. Daraus folgt, daß C positiv semidefinit ist und $\operatorname{Re} a = -a' \leq 0$. Als letztes beweisen wir, daß die Matrix $4\operatorname{Re} a \cdot C + \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b$ negativ semidefinit ist. Dazu können wir oBdA $a' = -\operatorname{Re} a \neq 0$ annehmen. Für beliebiges $x\in\mathbb{R}^m$ setzen wir $\alpha := -\frac{1}{a'}\sum_{j\in m} d'_j x_j$. Aus der positiven Semidefinitheit von a'C' folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq ({}^t x, \alpha) a' C' \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \\ &= {}^t x a' C x + 2\alpha a' \sum_{j\in m} x_j d'_j + \alpha^2 a'^2 \\ &= {}^t x a' C x - \frac{1}{4}\Big(\sum_{j\in m} x_j \operatorname{Im} b_j\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\, {}^t x\,(-4 \operatorname{Re} a \cdot C - \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b)\, x \end{aligned}$$

Da dies für alle $x\in\mathbb{R}^m$ gilt, ist die Matrix $4\operatorname{Re} a\cdot C + \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b$ negativ semidefinit.

((ii)⇒(i)) : Wir definieren folgende Distribution T' auf $G\times\mathbb{T}$:

$$T' := \Big(\sum_{j\in m} \operatorname{Re} b_j X'_j + \operatorname{Im} a\cdot Y' + \sum_{j,l\in m} c_{jl} X'_j *_\omega X'_l + \frac{1}{2}\sum_{j\in m} \operatorname{Im} b_j (X'_j *_\omega Y' + Y' *_\omega X'_j) - \operatorname{Re} a\cdot Y'^{*_\omega 2}\Big) *_\omega \mathbb{1}_{K'}$$

Indem man die obigen Schlüsse umkehrt, sieht man wieder mit [15], Theorem 9.1, daß T' eine positiv normierte, lokale $\mathbb{1}_{K'}$-dissipative Distribution auf $G\times\mathbb{T}$ ist. Damit ist $T = ZT'$ χ-dissipativ und lokal. □

In den folgenden sechs Korollaren werden die in den ersten drei Paragraphen eingeführten Begriffe für lokale Distributionen auf

Lie-Gruppen charakterisiert.

(6.11) Korollar: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T \in D(G)$ ist χ-dissipativ, lokal und normiert,

(ii) T erfüllt die Aussage (ii) aus (6.10) und es gilt entweder $\operatorname{Re} a = 0$ oder es existiert ein $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\langle \operatorname{Im} b \mid x \rangle^2 = -4 \operatorname{Re} a \; {}^t x (c_{jl})_{j,l \in m} x \neq 0$.

Beweis: Die Matrix C sei wie in (6.10) definiert, S sei die Matrix $4 \operatorname{Re} a \, C + \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b$.

(i)$\Rightarrow$(ii): Wenn $\operatorname{Re} a = 0$, sind wir fertig. Sei also $\operatorname{Re} a < 0$. Nach (6.10) und der Definition der Normiertheit (1.7) existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ mit ${}^t x_\varepsilon (S + 4\varepsilon C) x_\varepsilon > 0$.
V sei der Untervektorraum $\{x \in \mathbb{R}^m : Cx = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m : {}^t x C x = 0\}$ von $\mathbb{R}^m$.
Für alle $x \in V$ gilt wegen der negativen bzw. positiven Semidefinitheit von S bzw. $\operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b$
${}^t x S x = 0$, das heißt $Sx = 0$.
Bezeichnet x'_ε die orthogonale Projektion von x_ε auf $V^\perp$, so gilt wegen $x'_\varepsilon - x_\varepsilon \in V$
${}^t x'_\varepsilon (S + 4\varepsilon C) x'_\varepsilon = {}^t x_\varepsilon (S + 4\varepsilon C) x_\varepsilon > 0$.
x sei ein Häufungspunkt der Folge $(\|x'_{1/n}\|_2^{-1} \cdot x'_{1/n} : n \in \mathbb{N})$.
Es folgt einerseits
${}^t x S x = 0$, das heißt
$\langle \operatorname{Im} b \mid x \rangle^2 = -4 \operatorname{Re} a \; {}^t x C x$,
und andererseits wegen $x \in V^\perp$, $x \neq 0$ und der Wahl von V
${}^t x C x \neq 0$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Wenn $\operatorname{Re} a = 0$, so ist für jedes $\varepsilon > 0$ $\operatorname{Re}(a + \varepsilon) > 0$, also $T + \varepsilon \chi \omega_K$ nach (6.10) nicht χ-dissipativ und somit T normiert.

Seien also $\mathrm{Re}\, a < 0$ und $x \in \mathbb{R}^m$ so gewählt, daß

$\langle \mathrm{Im}\, b \mid x \rangle^2 = -4\, \mathrm{Re}\, a \cdot {}^t x C x \neq 0.$

Für alle $\varepsilon > 0$ ist dann

${}^t x(S + 4\varepsilon C)x = {}^t x S x + 4\varepsilon\, {}^t x C x = 4\varepsilon\, {}^t x C x > 0,$

also kann die Matrix

$4(\mathrm{Re}\, a + \varepsilon)\cdot C + \mathrm{Im}\, b \otimes \mathrm{Im}\, b = S + 4\varepsilon C$

nicht negativ semidefinit sein und nach (6.10) $T + \varepsilon\chi\omega_K$ nicht χ-dissipativ. Deshalb ist T normiert. □

(6.12) Korollar: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T \in D(G)$ ist 1_K-dissipativ, lokal und positiv normiert,

(ii) T erfüllt die Aussage (ii) von (6.10) und es gilt $a = 0$, $b_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in m$ (und $\chi = 1_K$).

(6.13) Korollar: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T \in D(G)$ ist χ-primitiv,

(ii) $T = (\sum_{j\in m} b_j X_j + ia\varepsilon_1) * \chi\omega_K$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b_j \in \mathbb{R}$ $(j \in m)$

und $\mathrm{Ad}(k)(\sum_{j\in m} b_j X_j) = \sum_{j\in m} b_j X_j$ für alle $k \in K$.

(6.14) Korollar: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T \in D(G)$ ist echt K-primitiv,

(ii) $T = \sum_{j\in m} b_j X_j * \omega_K$ mit $b_j \in \mathbb{R}$ $(j \in m)$

und $\mathrm{Ad}(k)(\sum_{j\in m} b_j X_j) = \sum_{j\in m} b_j X_j$ für alle $k \in K$.

(6.15) Korollar: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T \in D(G)$ ist χ-quadratisch und $T \neq 0$.

(ii) $T = \left(\sum_{j \in p} X'^{*2}_j + (ai\varepsilon_1 + X'_p)^{*2} \right) * \chi\omega_K$

mit $p \in m$, linear unabhängigen $X'_j \in M$

(vgl. (6.9)), $a \geq 0$,

$$\sum_{j \in p+1} (Ad(k)X'_j)^{*2} = \sum_{j \in p+1} X'^{*2}_j \qquad \text{für alle } k \in K$$

und im Falle $a \neq 0$

$$Ad(k)X'_p = X'_p \qquad \text{für alle } k \in K.$$

Beweis: ((i)⇒(ii)): Nach (6.11) ist T von der Form

$$T = \left(a'\varepsilon_1 + \sum_{j \in m} b_j X_j + \sum_{j,l \in m} c_{jl} X_j^* X_l \right) * \chi\omega_K .$$

Wegen $T^* = T$ gilt $a' \in \mathbb{R}$ und $b_j \in i\mathbb{R}$ für alle $j \in m$.

Fall I: $a' = 0$. Da die Matrix $4a'C + \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b = \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b$ negativ semidefinit ist, gilt $b_j = 0$ für alle $j \in m$.

Die Matrix C ist positiv semidefinit und wegen $T \neq 0$ nicht die Nullmatrix; also existieren $p \in m$ und linear unabhängige $X'_j \in M$ $(j \in p+1)$ mit

$$\sum_{j,l \in m} c_{jl} X_j^* X_l = \sum_{j \in p+1} X'^{*2}_j .$$

Die Darstellung von T in (ii) folgt, wenn man $a := 0$ setzt.

Fall II: $a' < 0$. Die Matrix $S := (s_{jl})_{j,l \in m} := 4a'C + \operatorname{Im} b \otimes \operatorname{Im} b$ ist negativ semidefinit. Da nach (6.11) ein $x \in \mathbb{R}^m$ mit ${}^t x S x = 0$ und $\langle b \mid x \rangle \neq 0$ existiert, ist der Rang p von S echt kleiner als m und es existieren linear unabhängige $X'_j \in M$ $(j \in p)$ mit

$$\sum_{j,l \in m} \frac{s_{jl}}{4a'} X_j^* X_l - \sum_{j \in p} X'^{*2}_j .$$

Setzt man nun $a := \sqrt{-a'}$ und $X'_p := \sum_{j\in m} \frac{-ib_j}{\sqrt{-4a'}} X_j$, so ist X'_p linear unabhängig von den übrigen X'_j $(j\in p)$.

[Wir betrachten die Linearform ϕ auf M, die jedem X_j die reelle Zahl x_j zuordnet. Wegen ${}^t xSx = 0$ gilt $\phi(X'_j) = 0$ für alle $j\in p$. Andererseits gilt $\phi(X'_p) = \frac{-i}{\sqrt{-4a'}} \langle b \mid x\rangle \neq 0$. Also kann X'_p keine Linearkombination der $(X'_j : j\in p)$ sein.]

Damit hat man für T die Darstellung

$$\begin{aligned} T &= \Big(\sum_{j,l\in m} c_{jl} X_j{}^* X_l + \sum_{j\in m} b_j X_j + a'\varepsilon_1 \Big)^* \chi\omega_K \\ &\quad - \Big(\sum_{j,l\in m} \frac{s_{jl}}{4a'} X_j{}^* X_l + \frac{1}{4a'} \Big(\sum_{j\in m} b_j X_j \Big)^{*2} - 2i\sqrt{-a'} \sum_{j\in m} \frac{ib_j}{\sqrt{-4a'}} X_j + a'\varepsilon_1 \Big)^* \chi\omega_K \\ &= \Big(\sum_{j,l\in m} \frac{s_{jl}}{4a'} X_j{}^* X_l + \Big(i\sqrt{-a'}\,\varepsilon_1 - \sum_{j\in m} \frac{ib_j}{\sqrt{-4a'}} X_j \Big)^{*2} \Big)^* \chi\omega_K \\ &= \Big(\sum_{j\in p} X'_j{}^{*2} + (ia\,\varepsilon_1 + X'_p)^{*2} \Big)^* \chi\omega_K \,. \end{aligned}$$

Die übrigen Behauptungen folgen aus (6.10) (ii).

((ii)⇒(i)) : Die linear unabhängigen Elemente X'_j $(j\in p+1)$ von M können zu einer Basis $(X'_j : j\in m)$ von M ergänzt werden. In dieser Basis sind alle in (6.10) (ii) auftretenden Matrizen diagonal, denn

$$T = (-a^2\varepsilon_1 + 2ia\cdot X'_p + \sum_{j\in p+1} X'_j{}^{*2})^* \chi\omega_K \,.$$

Man kann also alle Bedingungen aus (6.10) (ii) leicht ablesen. Von $x = e_p$ wird Bedingung (ii) aus (6.11) erfüllt. Also ist T χ-dissipativ, lokal und normiert. Da T offensichtlich der Gleichung $T^* = T$ genügt, ist T χ-quadratisch. □

(6.16) Korollar: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $T \in D(G)$ ist echt K-quadratisch.

(ii) $T = \sum_{j \in p} X'^{*2}_j * \omega_K$

mit $p \in m+1$, linear unabhängigen $X'_j \in M$ $(j \in p)$

derart, daß

$$\sum_{j \in p} (Ad(k)X'_j)^{*2} = \sum_{j \in p} X'^{*2}_j \qquad \text{für alle } k \in K.$$

(6.17) Satz: Die Abbildung $Z : D'(G \times \mathbb{T}; K') \to D'(G; \chi)$ bildet die Menge der lokalen, positiv normierten und $1_{K'}$-dissipativen Distributionen auf $G \times \mathbb{T}$ bijektiv auf die Menge der lokalen, normierten und χ-dissipativen Distributionen auf G ab.

Beweis: Nach (6.10) ist nur die Injektivität zu zeigen.

(I) Sei G eine Lie-Gruppe und gelte $ZT' = ZT''$ mit lokalen, positiv normierten $1_{K'}$-dissipativen Distributionen $T', T'' \in D(G \times \mathbb{T})$. Nach (6.13) gilt (mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von (6.11))

$$T' = \Big(\sum_{j \in m} b'_j X'_j + b'Y' + \sum_{j,l \in m} c'_{jl} X'_j * X'_l + \sum_{j \in m} d'_j (X'_j * Y' + Y' * X'_j) + a' Y'^{*2} \Big) * \omega_{K'}$$

$$T'' = \Big(\sum_{j \in m} b''_j X'_j + b''Y' + \sum_{j,l \in m} c''_{jl} X'_j * X'_l + \sum_{j \in m} d''_j (X'_j * Y' + Y' * X'_j) + a'' Y'^{*2} \Big) * \omega_{K'}$$

mit reellen Zahlen $a', a'', b', b'', b'_j, b''_j, c'_{jl}, c''_{jl}, d'_j$ und d''_j. Wie im Beweis von (6.11) gilt

$$ZT' = \Big((-a' + ib')\varepsilon_1 + \sum_{j \in m} (b'_j + 2id'_j) X_j + \sum_{j,l \in m} c'_{jl} X_j * X_l \Big) * \chi \omega_K$$

und entsprechend für ZT''. Aus $ZT' = ZT''$ folgt aber $a' = a''$, $b' = b''$, $b'_j = b''_j$, $d'_j = d''_j$ und $c'_{jl} = c''_{jl}$ für alle $j,l \in m$, und damit $T' = T''$.

(II) Sei nun G eine Lie-projektive Gruppe. Für alle $L \in F$ (vgl. (5.7)) und jede Distribution $T \in D'(G \times \mathbb{T}; K')$ gilt dann

$$Z(\pi_{L \times \{1\}}(T)) = \pi_L(ZT) .$$

Aus $ZT' = ZT''$ folgt also

$$Z(\pi_{L \times \{1\}}(T')) = \pi_L(ZT') = \pi_L(ZT'') = Z(\pi_{L \times \{1\}}(T''))$$

und damit wegen I

$$\pi_{L \times \{1\}}(T') = \pi_{L \times \{1\}}(T'') \qquad \text{für alle } L \in F.$$

Dies impliziert $T' = T''$.

(III) Für eine beliebige lokalkompakte Gruppe G existiert nach (1.14) eine Lie-projektive Untergruppe G_o, die K enthält. Da der Träger jeder lokalen Distribution auf $G \times \mathbb{T}$ in der Lie-projektiven Gruppe $G_o \times \mathbb{T}$ enthalten ist, können wir II anwenden. □

7. Beispiele lokaler dissipativer Distributionen auf homogenen Mannigfaltigkeiten

Bei allen besprochenen homogenen Mannigfaltigkeiten handelt es sich um Riemannsche symmetrische Paare im Sinn von [12], S. 174. Im ersten Beispiel (7.3) geht es um den Euklidischen Typ (vgl. [12], S. 194). Symmetrische Paare von kompaktem bzw. nicht kompaktem Typ werden zuerst in einem allgemeinen Satz (7.5) behandelt, der im nicht kompaktem Fall aus [8], Corollaire 1.1. auf S. 36 folgt. Als Beispiele von Riemannschen symmetrischen Paaren von nicht kompaktem Typ werden $(SL(p,\mathbb{R}),SO(p))$ in (7.8), $(SU(p,q),S(U(p)\times U(q)))$ in (7.15), $(SO(p,q)_1,SO(p)\times SO(q))$ in (7.20) und als Spezialfall des letzten $(SO(p,1)_1,SO(p))$ in (7.21) beschrieben. Unter Ausnutzung der Dualität zwischen kompaktem und nicht kompaktem Typ werden folgende Beispiele Riemannscher symmetrischer Paare von kompaktem Typ besprochen: $(SU(p),SO(p))$ in (7.10), $(SU(p+q),S(U(p)\times U(q)))$ in (7.12), als Spezialfall hiervon $(SU(p+1),SU(p))$ in (7.13), sowie $(SO(p+q),SO(p)\times SO(q))$ in (7.17) mit dem Spezialfall $(SO(p+1),SO(p))$ in (7.18).

(7.1) Bezeichnungen: Alle in diesem Paragraphen vorkommende Gruppen sind Matrixgruppen, das heißt Untergruppen der generellen linearen Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ (mit passendem $n\in\mathbb{N}$). Ihre Lie-Algebra konkretisieren wir als eine Unter-Lie-Algebra der Menge der nxn-Matrizen mit $[X,Y] = XY - YX$ für nxn-Matrizen X und Y und $\exp(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$ für jede nxn-Matrix X (vgl. [12], S. 100-101).

Bezüglich der Begriffe des Idempotents auf (G;K) und der Faltungshalbgruppe auf dem homogenen Raum G/K sei auf die Diskussion in (1.3) verwiesen. K ist dabei in jedem Beispiel eine vorgegebene kompakte Untergruppe von G.

(7.2) Als erstes Beispiel betrachten wir die Bewegungsgruppe G von $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ definiert durch

$$G := M(p) := \left\{ \begin{pmatrix} M & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : M \in SO(p),\ y \in \mathbb{R}^p \right\}$$

sowie die kompakte Untergruppe

$$K := \{g \in G:\ g e_p = e_p\} = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : M \in SO(p) \right\} \cong SO(p).$$

G ist also isomorph zum halbdirekten Produkt der speziellen orthogonalen Gruppe SO(p) und der Abelschen Gruppe $\mathbb{R}^p$.
$M^b(G;K)$ ist damit isomorph zur Faltungs-Algebra der rotationssymmetrischen beschränkten Radon-Maße auf $\mathbb{R}^p$ (vgl. [18]).
Eine Basis von Lie(G) wird gegeben durch die Matrizen

$X_j := E_{jp}$ für $j \in p$ und

$Y_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ für $j \in l \in p$.

Es gilt

$Lie(K) = \langle Y_{jl} : j \in l \in p \rangle$ und mit

$M := \langle X_j : j \in p \rangle$ hat man

$Lie(G) = Lie(K) \oplus M$ (als direkte Summe von Vektorräumen).

Für $k := \exp(rY_{jl}) \in K$ (mit $r \in \mathbb{R}$ und $j \in l \in p$) gilt

$$Ad(k)(X_m) = \begin{cases} X_m & \text{wenn } m \neq j, l, \\ \cos r\, X_l + \sin r\, X_j & \text{wenn } m = l\ , \\ \cos r\, X_j - \sin r\, X_l & \text{wenn } m = j\ . \end{cases}$$

Da die Untergruppe K zusammenhängend und kompakt ist, wird sie von den Elementen der Gestalt $\exp(rY_{jl})$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $j \in l \in p$ erzeugt; es folgt

$Ad(k)M \subset M$ für alle $k \in K$.

(7.3) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.2) gilt für $G := M(p)$ und $K := SO(p)$ und $p \geq 1$:

a) ω_K ist das einzige Idempotent auf $(G;K)$.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Alle lokalen, 1_K-dissipativen Distributionen T auf G sind gegeben durch

$$T = (a\varepsilon_1 + c \cdot \sum_{j \in p} X_j^{*2}) * \omega_K \qquad \text{mit} \quad \mathrm{Re}\, a \leq 0 \text{ und } c \geq 0.$$

Beweis: Als erstes zeigen wir $N(K) = K$. Dies resultiert aus der folgenden Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{pmatrix} M & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N(K)$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{M' \in SO(p)} \begin{pmatrix} MM'M^{-1} & y - MM'M^{-1}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \in K$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{M' \in SO(p)} y = MM'M^{-1}y$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{M' \in SO(p)} M^{-1}y = M'M^{-1}y$$

$$\Leftrightarrow M^{-1}y - 0$$

$$\Leftrightarrow y - 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} M & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K.$$

Aus (2.11) folgt nun b).

Man rechnet nun leicht nach, daß zwischen Lie(K) und Lie(G) keine Zwischen-Lie-Algebren liegen. Wegen $N(K) = K$ gibt es keine abgeschlossenen echten Untergruppen von G, die K echt enthalten. Da G nicht kompakt ist, ist a) bewiesen.

c) Wegen (6.10) und b) ist T genau dann lokal und 1_K-dissipativ, wenn

$$T = (a\varepsilon_1 + \sum_{j,l\in p} c_{jl} X_j^* X_l)^* \omega_K$$

mit $\mathrm{Re}\, a < 0$, einer positiv semidefiniten reellen Matrix (c_{jl}) und

$$\sum_{j,l\in p} c_{jl} \mathrm{Ad}(k)X_j^* \mathrm{Ad}(k)X_l = \sum_{j,l\in p} c_{jl} X_j^* X_l$$

für alle $k \in K$ der Form $k = \exp(rY_{mn})$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $m \neq n \in p$.

Das Polynom $P(t) = \sum_{j,l\in p} c_{jl} t_j t_l$ ist also invariant bezüglich aller Substitutionen

$$t_j \to \begin{cases} t_j & \text{für } j \neq m,n \ , \\ \cos r\, t_m + \sin r\, t_n & \text{für } j = m \ , \\ \cos r\, t_n - \sin r\, t_m & \text{für } j = n \ . \end{cases}$$

Damit gilt sogar $P(t) = P(A(t))$ für alle $A \in SO(p)$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$P(t) = c \cdot \sum_{j\in p} t_j^2 \qquad \text{mit einem } c \in \mathbb{R}, \text{ das heißt}$$

$$T = (a\varepsilon_1 + c \sum_{j\in p} X_j^{*2})^* \omega_K \ . \ \square$$

(7.4) Die nun folgenden Beispiele betreffen bis auf (7.13) allesamt irreduzible Riemannsche symmetrische Paare $(G;K)$ im Sinn von [12], S. 174 und S. 306. M läßt sich in diesem Fall so wählen, daß $[M,M] \subset \mathrm{Lie}(K)$ und $[M,\mathrm{Lie}(K)] \subset M$ (vgl. [12], S. 195). Die Gruppe G ist halbeinfach, also ist die Killing-Form B von $\mathrm{Lie}(G)$ eine nicht entartete Bilinearform auf $\mathrm{Lie}(G)$ und, je nachdem $(G;K)$ von kompaktem oder nicht kompaktem Typ ist, ist die Einschränkung von B auf $M \times M$ negativ oder positiv definit. $(X_j : j \in p)$ sei also eine Orthonormalbasis von M.
Wegen der Irreduzibilität existiert zwischen $\mathrm{Lie}(K)$ und $\mathrm{Lie}(G)$ keine echte Zwischen-Lie-Algebra.
Der nun folgende Satz ist im nicht kompakten Fall eine Konsequenz von [8] , Corollaire 1.1. auf S. 36.

(7.5) Satz: Unter den Voraussetzungen von (7.4) sind sämtliche echt K-quadratische Distributionen auf G gegeben durch

$$\lambda \cdot \sum_{j\in p} X_j^{*2} * \omega_K \qquad \text{mit } \lambda \geq 0.$$

Beweis: Der triviale Fall dim G = dim K sei oBdA ausgeschlossen. Wegen (3.4) genügt es zu beweisen, daß jede echt K-quadratische Distribution $T \neq 0$ von der angegebenen Form ist. Nach (6.10) gilt

$$T = \sum_{j,l\in p} c_{jl} X_j * X_l * \omega_K$$

mit einer positiv semidefiniten Matrix $c := (c_{jl})_{j,l\in p} \neq 0$.

Für jedes $k\in K$ sei $b(k)$ die(wegen $B(Ad(k)X,Ad(k)Y) = B(X,Y)$ für alle $X,Y \in M$) orthogonale pxp-Matrix mit

$$Ad(k)X_j = \sum_{l\in p} b(k)_{jl} X_l \qquad \text{für alle } j\in p.$$

Es folgt

$b(k^{-1}) = {}^t b(k)$ und $c = b(k^{-1})cb(k)$ für alle $k\in K$.

Sei $V \neq \{0\}$ ein Eigenraum von c zu einem Eigenvektor $\lambda>0$.

Für alle $k\in K$ gilt $b(k)V = V$.

$$L := \{Y + \sum_{j\in p} x_j X_j : Y \in Lie(K),\ (x_j : j\in p) \in V\}$$

ist dann eine Zwischen-Lie-Algebra.

[Wegen $[Y,Y'] \in Lie(K) \subset L$ für alle $Y,Y' \in Lie(K)$ und $[X_j,X_l] \in [M,M] \subset Lie(K) \subset L$ für alle $j,l\in p$ ist nur zu zeigen, daß

$$[Y, \sum_{j\in p} x_j X_j] \in L \quad \text{für alle } Y \in Lie(K) \text{ und alle } (x_j : j\in p) \in V.$$

Es gilt aber $(\sum_{j\in p} b(\exp(-tY))_{lj} x_j : l\in p) \in V$ für alle $t\in\mathbb{R}$, also

$$(x_l' : l\in p) := (\frac{d}{dt} \sum_{j\in p} b(\exp(-tY))_{lj} x_j |_{t=0} : l\in p) \in V$$

und damit nach [12], Kapitel II, §5, Gleichung (4):

$$[Y, \sum_{j\in p} x_j X_j] = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tY)) \sum_{j\in p} x_j X_j|_{t=o} = \frac{d}{dt} \sum_{j,l\in p} x_j b(\exp tY)_{jl} X_l|_{t=o}$$

$$= \sum_{l\in p} \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j\in p} b(\exp(-tY))_{lj} x_j \Big) X_l|_{t=o} = \sum_{l\in p} x_l' X_l \in L \ . \ \square$$

Nach Voraussetzung (7.4) folgt $L = \mathrm{Lie}(G)$, also $V = \mathbb{R}^p$ und somit $c = \lambda \cdot I$, das heißt

$$T = \lambda \cdot \sum_{j\in p} X_j^{*2} * \omega_K \ . \quad \square$$

(7.6) Bemerkung: Die echt K-quadratischen Distributionen sind also gerade Vielfache des mit ω_K gefalteten Casimir-Operators auf G (vgl. [12], S. 451).

(7.7) Als erstes Beispiel eines irreduziblen symmetrischen Paares von nicht kompaktem Typ untersuchen wir die Gruppe $G := SL(p,\mathbb{R})$ mit der kompakten Untergruppe $K := SO(p)$ mit $p \geq 2$ (vgl. [12], S. 348).

Eine Basis von $\mathrm{Lie}(G)$ wird gegeben durch

$X_{jl} := E_{jl} + E_{lj}$ für $j \in l \in p$,

$\tilde{X}_j := \sum_{n\in j+1} E_{nn} - (j+1)E_{j+1,j+1}$ für $j \in p-1$,

$Y_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ für $j \in l \in p$.

(Vgl. [12], S. 341.)

(7.8) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.7) gilt für $G : SL(p,\mathbb{R})$ und $K := SO(p)$ mit $p \geq 2$:

a) ω_K ist das einzige Idempotent auf $(G;K)$.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Sämtliche lokalen, 1_K-dissipativen Distributionen auf G haben die Form

$$(a\varepsilon_1 + c\,(\sum_{j\varepsilon l\varepsilon p} X_{jl}^{*2} + \sum_{j\varepsilon p-1} \frac{2}{j^2+3j+2}\,\tilde{X}_j^{*2}))*\omega_K$$

mit $\mathrm{Re}\,a \leq 0$ und $c \geq 0$.

Beweis: a) Nach [12], VI, Theorem 2.2 ist K eine maximale kompakte Untergruppe von G. Also gilt a). Da keine Zwischen-Lie-Algebren existieren, gilt $N(K)_1 = K$, und nach (2.11) folgt b).

c) Nach [1], S. 15, (15) gilt für die Killing-Form B auf $\mathrm{Lie}(G)$:

$$B(X_{jl},X_{mn}) = 4p\delta_{jm}\delta_{ln} \qquad \text{für } j\varepsilon l\varepsilon p \text{ und } m\varepsilon n\varepsilon p,$$

$$B(X_{jl},\tilde{X}_m) = 0 \qquad \text{für } j\varepsilon l\varepsilon p \text{ und } m\varepsilon p-1,$$

$$B(\tilde{X}_j,\tilde{X}_l) = 2p(j^2+3j+2)\delta_{jl} \qquad \text{für } j\varepsilon p-1 \text{ und } l\varepsilon p-1.$$

Da $M := \langle X_{jl},\tilde{X}_m : j\varepsilon l\varepsilon p,\ m\varepsilon p-1\rangle$ der Eigenraum zum Eigenwert -1 der Abbildung $X \mapsto -{}^tX$ von $\mathrm{Lie}(G)$ in sich ist, sind die übrigen Voraussetzungen von Satz (7.5) erfüllt (vgl. [12], S. 195, (1)). Die Behauptung folgt also aus (7.5), (6.10) und b). □

(7.9) Das irreduzible symmetrische Paar $(G;K) := (SU(p),SO(p))$ $(p\geq 2)$ ist von kompaktem Typ und zum vorhergehenden dual (vgl. [12], S. 348 und S. 199 ff).

Eine Basis der Lie-Algebra von G wird gegeben durch

$$X_{jl} := iE_{jl} + iE_{lj} \qquad \text{für } j\varepsilon l\varepsilon p,$$

$$\tilde{X}_j := i(\sum_{n\varepsilon j+1} E_{nn} - (j+1)E_{j+1,j+1}) \qquad \text{für } j\varepsilon p-1,$$

$$Y_{jl} := E_{jl} - E_{lj} \qquad \text{für } j\varepsilon l\varepsilon p.$$

Weiter setzen wir für jedes gerade $j\varepsilon p$ $h_j := e^{\pi ij/p}\cdot I_p \varepsilon SU(p)$ und für jedes ungerade $j\varepsilon p$ $h_j := e^{\pi ij/p}(E_{o1}+E_{1o}+\sum_{j\geq 2} E_{jj}) \varepsilon SU(p)$. Leicht sieht man, daß die Nebenklassen h_jK disjunkt sind.

Für jeden Teiler n von p definiert man die Untergruppe H_n von G durch

$$H_n := \bigcup_{j \in n} h_{jp/n} K \ .$$

Auf der kompakten Untergruppe H_n ist dann für jedes $m \in n$ die Abbildung $\chi_{n,m}$, die jedem Element der Nebenklasse $h_{jp/n}K$ die komplexe Zahl $e^{2\pi ijm/n} \in \mathbb{T}$ zuordnet, ein Charakter.

(7.10) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.9) gilt für $G := SU(p)$ und $K := SO(p)$ (für $p \geq 2$):

a) Auf $(G;K)$ gibt es folgende Idempotente:

$\chi_{n,m} \omega_{H_n}$ (wobei n ein Teiler von p ist und $m \in n$), sowie ω_G.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Wenn n ein Teiler von p ist und $m \in n$, so ist eine Distribution T auf G genau dann $\chi_{n,m}$-dissipativ und lokal, wenn $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a \leq 0$ und $c \geq 0$ existieren mit

$$T = (a\,\varepsilon_1 + c(\sum_{j \in l \in p} X_{jl}^{*2} + \sum_{j \in p-1} \frac{2}{j^2+3j+2} \tilde{X}_j^{*2})) * \chi_{n,m} \omega_{H_n} .$$

Beweis: Der Normalisator N(K) von K in G ist die Untergruppe H_p. Dies ist die Konsequenz aus der folgenden Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& g \in N(K) \\
\Longleftrightarrow & \bigwedge_{k \in K} {}^t(gkg^{-1})gkg^{-1} = I_p \\
\Longleftrightarrow & \bigwedge_{k \in K} k^{-1}({}^t gg)k = {}^t g.g \\
\Longleftrightarrow & \bigvee_{j \in p} {}^t g.g = e^{2\pi ij/p}.I_p \\
\Longleftrightarrow & \bigvee_{j \in p} {}^t(h_j^{-1}g)(h_j^{-1}g) = I_p \\
\Longleftrightarrow & \bigvee_{j \in p} h_j^{-1}g = \overline{h_j^{-1}g} = {}^t(h_j^{-1}g)^{-1} \\
\Longleftrightarrow & \bigvee_{j \in p} h_j^{-1}g \in K \\
\Longleftrightarrow & g \in H_p \ .
\end{aligned}$$

Wegen $H_p/K \cong \mathbb{Z}_p$ folgt die Behauptung durch Betrachtung der Untergruppenstruktur von $\mathbb{Z}_p$.

b) gilt wegen $N(K)_1 = K$ und (2.11).

c) Wegen der Dualität zum vorherigen Beispiel (7.8) und [12], Kapitel III, Lemma 6.1 gilt für die Killing-Form B auf Lie(G):

$$B(X_{j1},X_{mn}) = -4p\,\delta_{jm}\,\delta_{1n} \quad \text{für } j\varepsilon 1\varepsilon p \text{ und } m\varepsilon n\varepsilon p,$$
$$B(X_{j1},\tilde{X}_m) = 0 \quad \text{für } j\varepsilon 1\varepsilon p \text{ und } m\varepsilon p-1,$$
$$B(\tilde{X}_j,\tilde{X}_1) = -2p(j^2+3j+2)\,\delta_{j1} \quad \text{für } j\varepsilon p-1 \text{ und } 1\varepsilon p-1.$$

Da $M := \langle X_{j1},\tilde{X}_m : j\varepsilon 1\varepsilon p,\ m\varepsilon p-1\rangle$ der Eigenraum zum Eigenwert -1 der Abbildung $X \to \overline{X}$ von Lie(G) in sich ist, sind die Voraussetzungen für Satz (7.5) erfüllt. Für das Idempotent ω_K folgt die Behauptung also aus (7.5), (6.10) und b).

Für ein beliebiges Idempotent $\chi_{n,m}\omega_{H_n}$ folgt nun die Behauptung aus folgenden Überlegungen:

Einerseits folgt wegen $\dim H_p = \frac{1}{2}p(p-1) < p^2-1 = \dim G$ mittels (3.4) die Existenz von nicht trivialen $\chi_{n,m}$-quadratischen Distributionen.

Andererseits ist jede $\chi_{n,m}$-dissipative, lokale Distribution T von der Form $T'*\chi_{n,m}\omega_{H_n}$ mit einer 1_K-dissipativen, lokalen Distribution T' auf G. Dies folgt durch zweimalige Anwendung von (6.10). T' ist nach dem eben Bewiesenen von der Form

$$T' = (a\,\varepsilon_1 + c(\sum_{j\varepsilon 1\varepsilon p} X_{j1}^{*2} + \sum_{j\varepsilon p-1} \frac{2}{j^2+3j+2}\,\tilde{X}_j^{*2}))*\omega_K\ ,$$

folglich hat auch T die behauptete Gestalt. □

(7.11) Wir betrachten als nächstes Beispiel eines irreduziblen symmetrischen Paares von kompaktem Typ das Paar (G;K) mit

$G := SU(p+q)$ und

$K := \{g \in G : g(V_o) = V_o\}$

$= \{\begin{pmatrix} g_o & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} : g_o \in U(p),\ g_1 \in U(q),\ \det(g_o)\det(g_1) = 1\}$

$=: S(U(p)\times U(q))$

für alle $p \geq q \geq 1$ (vgl. [12], S.348-349). Dabei ist

$V_o := \{x \in \mathbb{C}^{p+q} : x_j = 0 \text{ für } p < j \leq p+q\}$.

Im Falle $p=q$ setzen wir $h := \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ und $H := K \cup hK$,

χ sei der Charakter auf H mit $\chi(K) = 1$ und $\chi(hK) = -1$.

Im Falle $q=1$ sei $\bar{K}$ die zu $SU(p)$ isomorphe Untergruppe

$\bar{K} := \{g \in G : g(e_p) = e_p\}$ von K.

Eine Basis der Lie-Algebra von G wird gegeben durch

$X_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ falls $j \leq p$ und $p < l \leq p+q$,

$X'_{jl} := iE_{jl} + iE_{lj}$ falls $j \leq p$ und $p < l \leq p+q$,

$Y_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ falls $j < l \leq p$ oder $p < j < l \leq p+q$,

$Y'_{jl} := iE_{jl} + iE_{lj}$ falls $j < l \leq p$ oder $p < j < l \leq p+q$,

$Z_j := iE_{j+1,j+1} - iE_{oo}$ falls $j \leq p+q-1$ (vgl. [12], S. 341).

(7.12) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.11) gilt für

$G := SU(p+q)$ und $K := S(U(p)\times U(q))$ mit $p \geq q \geq 1$:

a) Auf $(G;K)$ gibt es folgende Idempotente:

ω_K und ω_G, sowie im Fall $p=q$ außerdem ω_H und $\chi\omega_H$.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Ist μ_o eines der Idempotente ω_K, ω_H oder $\chi\omega_H$, so so ist eine Distribution auf G genau dann lokal und μ_o-dissipativ, wenn sie von der Form

$(a\varepsilon_1 + c \sum_{\substack{j \leq p \\ p < l \leq p+q}} (X_{jl}^{*2} + X'^{*2}_{jl})) * \mu_o$ mit $\mathrm{Re}\, a \leq 0$ und $c \geq 0$ ist.

Beweis: Als erstes zeigen wir, daß der Normalisator von K in G K ist, falls $p \neq q$, und H im Falle $p=q$:

Man sieht leicht, daß $\{0\}$, V_o, $V_1 := \{x \in \mathbb{C}^{p+q}: x_j = 0 \text{ für } j \in p\}$ und $\mathbb{C}^{p+q}$ die einzigen unter der Wirkung von K invarianten Unterräume von $\mathbb{C}^{p+q}$ sind. Es gilt

$$g \in N(K) \iff \bigwedge_{k \in K} g^{-1}kg(V_o) = V_o \iff \bigwedge_{k \in K} k(gV_o) = gV_o .$$

Wenn $p \neq q$, so ist V_o der einzige invariante Unterraum der Dimension q, also gilt $g \in N(K) \iff g(V_o)=V_o \iff g \in K$.

Wenn $p=q$, hat außerdem V_1 die Dimension q, also gilt

$g \in N(K) \iff g(V_o)=V_o$ oder $g(V_o)=V_1 \iff g \in K$ oder $hg \in K \iff g \in H$.

Damit ist nach (2.11) die Aussage b) bewiesen.

Da keine Zwischen-Lie-Algebren existieren und G zusammenhängend ist, gibt es im Fall $p \neq q$ keine echten Zwischengruppen zwischen K und G, im Fall $p=q$ genau die Zwischengruppe H.

Der einzige nicht triviale Charakter auf H, der K auf 1 abbildet, ist die angegebene Funktion χ. Auf der kompakten Gruppe G existiert außer dem Einheits-Charakter kein weiterer, der K auf 1 abbildet, da sein Kern ein Normalteiler der Dimension $\geq (p+q)^2-1$ wäre, der K enthielte. Dies beweist a).

c) Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt

$$B(X_{jl},X_{mn}) = -4(p+q)\delta_{jm}\delta_{ln} \qquad (j \in p \leq l \in p+q,\ m \in p \leq n \in p+q).$$

Mittels Anwendung von [12], Kapitel II, §6, Gleichung (1) folgt

$$B(X_{jl},X'_{mn}) = 0 \qquad (j \in p \leq l \in p+q,\ m \in p \leq n \in p+q) \text{ und}$$

$$B(X'_{jl},X'_{mn}) = -4(p+q)\delta_{jm}\delta_{ln} \qquad (j \in p \leq l \in p+q,\ m \in p \leq n \in p+q).$$

[[Z.B. $B(X'_{jl},X'_{jl}) = B(X'_{jl},-\frac{1}{2}[X_{jl},Z_{j-1}-Z_{l-1}]) \cdot B(X_{jl},\frac{1}{2}[X'_{jl},Z_{j-1}-Z_{l-1}]) = B(X_{jl},X_{jl}) = -4(p+q)$.]]

Damit folgt die Behauptung wieder aus (7.5). □

Als Folgerung dieses Satzes bestimmen wir nun die lokalen und dissipativen Distributionen auf dem Paar $(SU(p+1),SU(p))$. Wegen $N(SU(p))/SU(p) \cong \mathbb{T}$ ist die Menge der Idempotente auf $(SU(p+1), SU(p))$ sehr reichhaltig. Wir beschränken uns deshalb auf den einfachsten Fall des Idempotents $\omega_{SU(p)}$.

(7.13) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.11) gilt für $G := SU(p+1)$ und $\bar{K} := SU(p)$ für $p \geq 2$:

a) $P_{\mathbb{R}}(G;\bar{K}) = \{aZ_{p-1}^{*}\omega_{\bar{K}} : a \in \mathbb{R}\}$.

b) Eine Distribution T auf G ist genau dann lokal und $1_{\bar{K}}$-dissipativ, wenn $a,b \in \mathbb{C}$ und $c,d \in \mathbb{R}_+$ existieren mit $\operatorname{Re} a \leq 0$, $4 \operatorname{Re} a\, c + (\operatorname{Im} b)^2 \leq 0$ und

$$T = (a\varepsilon_1 + bZ_{p-1} + cZ_{p-1}^{*2} + d\sum_{j\in p}(X_{jp}^{*2} + X_{jp}'^{*2}))*\omega_{\bar{K}}.$$

Beweis: a) Man rechnet leicht nach, daß $N(\bar{K}) = K$.
Die Elemente von $\bar{K}$ kommutieren mit allen $\exp(tZ_{p-1})$ $(t \in \mathbb{R})$; also ist nach (2.10) $Z_{p-1}*\omega_{\bar{K}} \in P_{\mathbb{R}}(G;\bar{K})$. Wegen

$$\dim P_{\mathbb{R}}(G;\bar{K}) = \dim(K/\bar{K}) = \dim(SU(1)) = 1$$

folgt die Behauptung.

b) Wegen a) und (6.10) ist $(a\varepsilon_1 + bZ_{p-1} + cZ_{p-1}^{*2})*\omega_{\bar{K}}$ $1_{\bar{K}}$-dissipativ. Mit Hilfe von (6.10) und wegen $\bar{K} \subset K$ folgt aus der 1_K-Dissipativität von $\sum_{j\in p}(X_{jp}^{*2}+X_{jp}'^{*2})*\omega_K$ die $1_{\bar{K}}$-Dissipativität von $\sum_{j\in p}(X_{jp}^{*2}+X_{jp}'^{*2})*\omega_{\bar{K}}$.

Umgekehrt ist nach (6.10) jede $1_{\bar{K}}$-dissipative lokale Distribution T von der Gestalt

$$T \quad (a\varepsilon_1 + bZ_{p-1} + cZ_{p-1}^{*2} + Z_{p-1}*X + T_o)*\omega_{\bar{K}}$$

mit einer Linearkombination X der X_{jp} und X_{jp}' und einer quadratischen Form T_o in X_{jp} und X_{jp}' $(j\in p)$.

$X*\omega_K$ ist echt K-primitiv, nach (7.12) b) gilt also $X=0$.

$T_o*\omega_K$ ist echt K-quadratisch und nach (7.12) c) von der Form $d \sum_{j\in p} (\alpha X_{j1}^{*2} + X'^{*2}_{j1})*\omega_K$.

(7.14) Das zu (SU(p+q);SU(p)) duale symmetrische Paar von nicht kompaktem Typ ist gegeben durch

$G := SU(p,q) := \{g\in SL(p+q,\mathbb{C}) : {}^t g\, h_{p,q} g = h_{p,q}\}$ und

$K := \{g\in SU(p,q) : g(V_o)=V_o\} = \{\begin{pmatrix} g_o & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} : g_o \in U(p), g_1\in U(q), \det(g_o)\det(g_1)=1\}$
$= S(U(p)\times U(q))$

für alle $p\geq q\geq 1$. Dabei ist $V_o := \{x\in\mathbb{C}^{p+q} : x_j=0 \text{ für } p<j\leq p+q\}$

und $h_{p,q} := \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.

Eine Basis von Lie(G) wird gegeben durch

$X_{j1} := iE_{j1} - iE_{1j}$ falls $j\leq p$ und $p<l\leq p+q$,

$X'_{j1} := E_{j1} + E_{1j}$ falls $j\leq p$ und $p<l\leq p+q$,

$Y_{j1} := E_{j1} - E_{1j}$ falls $j\leq l\leq p$ oder $p<j\leq l\leq p+q$,

$Y'_{j1} := iE_{j1} + iE_{1j}$ falls $j\leq l\leq p$ oder $p<j\leq l\leq p+q$,

$Z_j := iE_{j+1,j+1} - iE_{oo}$ falls $j\leq p+q-1$.

(7.15) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.14) gilt für $G := SU(p,q)$ und $K := S(U(p)\times U(q))$ (für $p\geq q\geq 1$):

a) Auf (G;K) ist ω_K das einzige Idempotent.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Eine Distribution auf G ist genau dann 1_K-dissipativ und lokal, wenn sie von der Form

$(a\,\varepsilon_1 + c \sum_{\substack{j\in p \\ p<l\leq p+q}} (X_{j1}^{*2} + X'^{*2}_{j1}))*\omega_K$ mit $\mathrm{Re}\, a \leq 0$, $c\geq 0$ ist.

Beweis: a) Nach [12], Kapitel VI, Theorem 2.2 ist K eine maximale kompakte Untergruppe.

b) Da keine echten Zwischen-Lie-Algebren existieren und K kein Normalteiler von G ist, gilt $N(K)_1 = K$. Nach (2.11) gilt die Behauptung.

c) folgt aus (7.12) c) durch Ausnutzung der Dualität.

(7.16) Als nächstes Beispiel betrachten wir das irreduzible symmetrische Paar von kompaktem Typ (G;K) mit $G := SO(p+q)$ und $K := \{\begin{pmatrix} g_o & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} : g_o \in SO(p),\ g_1 \in SO(q)\} \cong SO(p)\times SO(q)$ für $p\geq q\geq 1$, $p\geq 2$, $p+q\neq 4$ (vgl. [12], S. 349).

Wir setzen $h := I_{p+q} - 2E_{oo} - 2E_{pp} \in G$ und $H := K \cup hK$. χ sei der Charakter auf der kompakten Untergruppe H von G, der die Elemente von K auf 1 und die Elemente von hK auf -1 abbildet.

Im Falle p=q definieren wir außerdem $h' := \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ und $H' := K \cup h'K$, $H'' := K \cup hh'K$ sowie $H''' := K \cup hK \cup h'K \cup hh'K$. Auf der kompakten Untergruppe H' von G sei χ' der Charakter, der die Elemente von K auf 1 und die Elemente von h'K auf -1 abbildet. Auf H'' definieren wir den Charakter χ'' durch $\chi''(k) := 1$ und $\chi''(hh'k) := -1$ für alle $k\in K$. Schließlich seien die Charaktere χ_o und χ_1 auf H''' definiert durch $\chi_o(h^j h'^l k) := (-1)^j$ und $\chi_1(h^j h'^l k) := (-1)^l$ für alle $k\in K$, $j,l\in\{0,1\}$.

Eine Basis von Lie(G) wird (für beliebige $p\geq q\geq 1$) gegeben durch

$X_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ falls $j\leq p$ und $p\leq l\leq p+q$ und

$Y_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ falls $j\leq l\leq p$ oder $p\leq j\leq l\leq p+q$.

(7.17) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.16) gilt für

$G := SO(p+q)$ und $K := SO(p)\times SO(q)$ mit $p\geq q\geq 1$, $p\geq 2$ und $p+q\neq 4$:

a) Auf $(G;K)$ existieren im Fall $p\neq q$ die Idempotente ω_K, ω_H, $\chi\omega_H$ und ω_G. Im Fall $p=q\geq 3$ kommen hierzu noch $\omega_{H'}$, $\omega_{H''}$, $\omega_{H'''}$, $\chi'\omega_{H'}$, $\chi''\omega_{H''}$, $\chi_o\omega_{H'''}$, $\chi_1\omega_{H'''}$ und $\chi_o\chi_1\omega_{H'''}$.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Sei μ_o eines der von ω_G verschiedenen Idempotente aus a). Dann ist eine Distribution $T\in D'(G)$ genau dann lokal und μ_o-dissipativ, wenn

$$T = (a\varepsilon_1 + c \sum_{\substack{j\in p \\ p\leq l\in p+q}} X_{jl}^{*2})*\mu_o \qquad \text{mit } \operatorname{Re} a\leq 0 \text{ und } c\geq 0 \text{ gilt.}$$

Beweis: Es gilt $N(K) = H$ im Falle $p\neq q$ und $N(K) = H'''$, falls $p=q\geq 3$, wie man analog zum Beweis der entsprechenden Aussage in (7.12) leicht nachrechnet. In beiden Fällen gilt $N(K)_1 = K$. Nach (2.11) ist also b) bewiesen.

Wegen des Fehlens von Zwischen-Lie-Algebren sind sämtliche Zwischengruppen zwischen G und K gegeben durch K, H und G, falls $p\neq q$, und K, H, H', H'', H''' und G falls $p=q\geq 3$.

Wegen $H/K\cong \mathbb{Z}_2$ und $H'''/K\cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ folgt daraus a).

c) Man rechnet leicht nach, daß

$$B(X_{jl},X_{mn}) = -2(p+q-2)\delta_{jm}\delta_{ln} \qquad (j\in p\leq l\in p+q,\ m\in p\leq n\in p+q)$$

gilt. Daraus folgt nach (7.5) die Behauptung. □

Als Spezialfall ergibt sich folgende Charakterisierung der lokalen und dissipativen Distributionen auf der Sphäre (vgl. [14], Theorem 3.1):

(7.18) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.16) gilt für

$G := SO(p+1)$ und $K := SO(p)$ mit $p \geq 2$:

a) Auf $(G;K)$ gibt es folgende Idempotente: ω_K, ω_H, $\chi\omega_H$ und ω_G.

b) Ist μ_o eines der Idempotente ω_K, ω_H oder $\chi\omega_H$, so ist eine Distribution auf G genau dann lokal und μ_o-dissipativ, wenn sie von der Form

$$(a\,\varepsilon_1 + c \sum_{j \in p} X_{jp}^{*2}) * \mu_o \qquad \text{mit } \operatorname{Re} a \leq 0 \text{ und } c \geq 0 \text{ ist.}$$

(7.19) Zum Beispiel (7.17) dual ist das symmetrische Paar $(G;K)$, wobei $G := SO(p,q)_1$ die Zusammenhangskomponente der 1 in

$SO(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{R}) : {}^t g\, h_{p,q}\, g = h_{p,q}\}$ (mit $h_{p,q} := \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$)

ist, sowie

$K := \left\{ \begin{pmatrix} g_o & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} : g_o \in SO(p),\ g_1 \in SO(q) \right\} = SO(p) \times SO(q)$.

Dabei ist $p \geq q \geq 1$, $p \geq 2$ und $p+q \neq 4$.

Eine Basis von $\mathrm{Lie}(G)$ wird gegeben durch

$X_{jl} := E_{jl} + E_{lj}$ für $j \in p$ und $p \leq l \in p+q$,

$Y_{jl} := E_{jl} - E_{lj}$ falls $j \in l \in p$ oder $p \leq j \in l \in p+q$.

(7.20) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.19) gilt für

$G := SO(p,q)_1$ und $K := SO(p) \times SO(q)$ mit $p \geq q \geq 1$, $p \geq 2$ und $p+q \neq 4$:

a) Auf $(G;K)$ ist ω_K das einzige Idempotent.

b) $P_{\mathbb{R}}(G;K) = \{0\}$.

c) Die lokalen, 1_K-dissipativen Distributionen auf G sind gerade diejenigen der Gestalt

$$(a\,\varepsilon_1 + c \sum_{\substack{j \in p \\ p \leq l \in p+q}} X_{jl}^{*2}) * \omega_K \qquad \text{mit } \operatorname{Re} a \leq 0 \text{ und } c \geq 0.$$

Beweis: Nach [12], Kapitel VI, Theorem 2.2 ist K eine maximale kompakte Untergruppe. Daraus folgt a).

Da K kein Normalteiler von G ist und keine echten Zwischen-Lie-Algebren existieren, ist $N(K)_1 = K$; wegen (2.11) folgt b).

c) Aus dem Beweis von (7.17) c) folgt unter Ausnutzung der Dualität

$$B(X_{j1},X_{mn}) = 2(p+q-2)\delta_{jm}\delta_{1n} \qquad (j\varepsilon p\leq 1\varepsilon p+q,\ m\varepsilon p\leq n\varepsilon p+q).$$

Daraus folgt die Behauptung mit Hilfe von (7.5).

Ein Spezialfall dieses Resultats ist die folgende Charakterisierung der lokalen und dissipativen Distributionen auf der (reellen) hyperbolischen Ebene.

(7.21) Satz: Mit den Bezeichnungen von (7.19) gilt für

$G := SO(p,1)_1$ und $K := SO(p)$ mit $p\geq 2$:

a) ω_K ist das einzige Idempotent auf $(G;K)$.

b) Eine Distribution auf G ist genau dann lokal und 1_K-dissipativ, wenn sie von der Form

$$(a\,\varepsilon_1 + c\sum_{j\varepsilon p} X_{jp}^{*2})*\omega_K$$

mit $\mathrm{Re}\,a \leq 0$ und $c \geq 0$ ist.

Bibliographie

[1] Barut, A.O.: Racka, R.: Theory of Group Representations and Applications. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[2] Berg, C.: Dirichlet forms on symmetric spaces. Annales Inst. Fourier (Grenoble) 23,1 (1973), 135-156.

[3] Bruhat, F.: Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques. Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 43-75.

[4] Courrège, P.: Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^n$ et formule de Lévy-Khinchine. Bull. Sci. Math. 2^e Sér. 88 (1964), 3-30.

[5] Duflo, M.: Représentations de semi-groupes de mesures sur un groupe localement compact. Annales Inst. Fourier (Grenoble) 28,3 (1978), 225-249

[6] Faraut, J.: Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs. Annales Inst. Fourier (Grenoble) 20 (1970), 235-301.

[7] Faraut, J.: Semi-groupes de Feller invariants sur les espaces hyperboliques. Séminaire Brelot-Choquet-Dény (Théorie du potentiel) 15^e année (1972) n°29, 17 pages.

[8] Gebuhrer, M.-O.: Processus de Markov relativistes. Noyaux de Hunt invariants et Laplaciens généralisés sur les espaces riemanniens symétriques de type compact. Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg I (1973).

[9] Gluškov, V.M.: The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem. AMS Translations II. Ser. 15 (1957), 55-93.

[10] Hazod, W.: Über die Lévy-Hinčin-Formel auf lokalkompakten topologischen Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 25 (1973), 301-322.

[11] Hazod, W.: Stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen. Lecture Notes in Mathematics Vol. 595, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[12] Helgason, S.: Differential Geometry and Symmetric Spaces. Academic Press, New York-London, 1962.

[13] Heyer, H.: Probability Measures on Locally Compact Groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 94, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[14] Heyer, H.: Convolution semigroups of probability measures on Gelfand pairs. Expo. Math. 1 (1983), 3-45.

[15] Hunt, G.A.: Semigroups of measures on a Lie group. Transactions of the AMS 81 (1956), 264-294.

[16] Janssen, A.: Continuous convolution semigroups with unbounded Lévy measures on locally compact groups. Arch. Math., 38(1982), 565-576.

[17] Jewett, R.I.: Spaces with an abstract convolution of measures. Advances in Math. 18 (1975), 1-101.

[18] Kingman, J.F.C.: Random walks with spherical symmetry. Acta Math. 109 (1963), 11-53.

[19] Lashof, R.K.: Lie algebras of locally compact groups. Pacific J. Math. 7 (1957), 1145-1162.

[20] Lévy, P.: Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, II.Ser., 3(1934), 337-366.

[21] Montgomery, D.; Zippin, L.: Topological Transformation Groups. Interscience Publishers, New York, 2nd edition 1964.

[22] Roth, J.P.: Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues. Annales Inst. Fourier (Grenoble) 26,4 (1976), 1-97.

[23] Schaefer, H.H.: Topological Vector Spaces. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[24] Siebert. E.: Über die Erzeugung von Faltungshalbgruppen auf beliebigen lokalkompakten Gruppen. Math. Z. 131 (1973), 313-333.

[25] Woll jr., J.W.: Homogeneous stochastic processes. Pacific J. Math. 9 (1959), 293-325.

[26] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 6th edition 1980.

Lebenslauf

Am 12. April 1956 kam ich als erstes Kind des Apothekers Hans Zeuner und seiner Frau Brigitte geborene Foß in Crailsheim zur Welt. Einen Monat später zog ich mit meinen Eltern nach Lauffen am Neckar um, wo meine beiden Brüder geboren wurden. Im April 1963 trat ich in die Herzog-Ulrich-Schule ein und wechselte im Dezember 1966 (Ende des ersten Kurzschuljahrs) in das Hölderlin-Gymnasium über, wo ich von der 5. direkt in die 7. Klasse versetzt wurde und im Juni 1974 das Abitur ablegte.

Mein Studium begann ich im Wintersemester 1974/75 an der Universität Tübingen. Zur Ableistung meines Zivildienstes in der beschützenden Werkstätte für geistig und körperlich Behinderte in Lauffen war ich von Wintersemester 1975/76 bis Sommersemester 1976 beurlaubt. Mit dem Wintersemester 1976/77 nahm ich mein Studium wieder auf und bestand im März 1978 die Vordiplomprüfung in Mathematik und Physik. Seit dem Wintersemester 1977/78 arbeitete ich als wissenschaftliche Hilfskraft, zuerst am Institut für Angewandte Physik, später am Mathematischen Institut. Am 30. Oktober 1978 legte ich die kirchenmusikalische C-Prüfung ab und am 27. Mai 1981 die Diplomprüfung in Mathematik mit Nebenfach Physik.

Seither arbeite ich als Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen. Meine Dissertation "Die Lévy-Hinčin-Formel für Faltungshalbgruppen komplexer Maße auf homogenen Räumen" fertigte ich zwischen Juni 1981 und Oktober 1983 unter Anleitung von Prof. Dr. H. Heyer an. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren H. Hähl, H. Heyer, P. Kramer, F. Lenz, G. Mack, R. Nagel, H. Salzmann, H.H. Schaefer, A. Schönhage und E. Siebert.